О рациональности производящей функции для числа корневых лесов в циркулянтных графах

Научный руководитель – Медных Александр Дмитриевич

Кутбаев Айдос Бакберген улы

Аспирант

Новосибирский государственный университет, Механико-математический факультет, Новосибирск, Россия

E-mail: a.kutbaev@g.nsu.ru

Пусть $s_1, s_2, ..., s_k$ такие натуральные числа, что $1 \leq s_1 < s_2 < ... < s_k \leq \frac{n}{2}$. Граф $C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$ на n вершинах $0, 1, 2, ..., n-1$ называется *циркулянтным* если вершина i, $i = 0, 1, ..., n-1$ смежна с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, ..., i \pm s_k (mod\, n)$. Если $s_k < \frac{n}{2}$, то все вершины графа имеют четную степень $2k$. Если n четное и $s_k = \frac{n}{2}$, то все вершины имеют нечетную степень $2k-1$ ([1]).

Пусть $\Phi(x)$- производящая функция для числа корневых лесов $f_\Gamma(n)$ в циркулянтном графе $\Gamma = C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$ или $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$. Мы покажем, что $\Phi(x)$ является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющей условию $\Phi(x) = -\Phi(\frac{1}{x})$. *Корневым деревом* называется дерево, в котором одна вершина выделена. *Корневой лес*- это лес, связанные компоненты которого являются корневыми деревьями. *Корневым остовным лесом* в графе Γ называем корневой лес, содержащий все вершины графа Γ ([2]). Мы рассматриваем обыкновенные графы.

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть $f_\Gamma(n)$ число корневых остовных лесов в циркулянтном графе $\Gamma = C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$ четной валентности или $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$ нечетной валентности. Тогда*

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n) x^n$$

является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами. Более того, $\Phi(x) = -\Phi(\frac{1}{x})$.

Источники и литература

1) A. D. Mednykh and I. A. Mednykh. The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic, *Discrete Math.* **342** (2019), 1772–1781.
2) L.A. Grunwald, I.A. Mednykh. The number of rooted forests in circulant graphs. ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA **22** (2022) P4.10.