Секция «Геометрия и топология»

Фазовая топология трехмерного биллиарда с проскальзыванием без фокальных кривых

Завьялов Владимир Николаевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: vnzavyalov@mail.ru

В работе [3] А.Т.Фоменко был введен новый класс биллиардов с проскальзыванием. Рассмотрим F — изометрию границы плоского эллипса, переводящую точку x в диаметрально противоположную ей точку y. Пусть материальная точка движется равномерно и прямолинейно внутри эллипса и попадает на границу. Продолжим ее траекторию из точки $y = F(x)$ по лучу, выходящему из нее под углом α. Иными словами, ее продолжение выходит из новой точки под тем же углом, "проскальзывая" вдоль границы. На основании этого такой класс систем был назван "биллиардами с проскальзывание".

Данная система обладает тем же первым интегралом, что и биллиард в эллипсе — параметром софокусной квадрики, являющейся каустикой траектории. Как оказалось, биллиарды с проскальзыванием реализуют геодезические потоки на неориентируемых поверхностях. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве компактную область, ограниченную конечным числом софокусных квадрик и имеющую двугранные углы излома на границе, равные $\dfrac{\pi}{2}$. Такую область назовем трехмерным биллиардным столом.

Классический биллиард внутри трехмерного биллиардного стола является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно–гладком смысле. Эта система обладает тремя независимыми попарно коммутирующими (относительно стандартной скобки Пуассона) первыми интегралами H, Λ_1, Λ_2, где Λ_1, Λ_2 — параметры квадрик, которых одновременно касаются все прямые траектории материальной точки. Г. В. Белозеров в работе [1] классифицировал все такие биллиарды по отношению слабой эквивалентности и комбинаторной эквивалентности столов.

Рассмотрим связный биллиардный стол, симметричный относительно координатных плоскостей. Выберем несколько пар противоположных гладких граней его границы и зададим на них проскользывание, то есть скажем, что при попадании на грань с проскальзыванием материальная точка, находившаяся в точке x с вектором скорости v_1, выйдет из точки $-x$ с вектором скорости v_2, где v_2 получается из v_1 путем следующих преобразований: сначала v_1 отражается от касательной плоскости к данной грани в точке x, а затем заменяется на противоположный. В точках излома проскальзывание определяется по непрерывности. Полученную систему назовем трехмерным биллиардом с проскальзыванием.

Трехмерный биллиард с проскальзыванием тоже является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле с теми же первыми интегралами, что и классический биллиард.

Рассмотрим связный односвязный трехмерный биллиардный стол, симметричный относительно координатных плоскостей и ограниченный софокусными эллипсоидом, однополостным и двуполостным гиперболоидами. Обозначим его через D. Граница этого стола состоит из 3-х пар симметричных гладких граней. А следовательно, на этом столе можно задать 7 комбинаций проскальзывания. Для каждой комбинации нами построена бифуркационная диаграмма, найдены классы гомеоморфности слоев слоения Лиувилля, описаны 1-перестройки торов Лиувилля. Также нами доказана теорема классификации изоэнергетических поверхностей.

Теорема 1. *Изоэнергетическая поверхность биллиарда с проскальзыванием на трехмерном столе D гомеоморфна $\dfrac{\mathbb{T}^i \times S^{5-i}}{(\mathbb{Z}_2)^i}$, где i — количество пар граней с проскальзыванием.*

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ (проект № 22-71-00111) в МГУ имени М.В. Ломоносова

Источники и литература

1) Г. В. Белозеров, Топологическая классификация биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками // Матем. сб., **213**:2, 2022, 3–36.

2) Fomenko A. T., Vedyushkina V. V., Zav'yalov V. N., Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping // Russ. Jour. of Math. Phis., **28**, 2021, 37–55.

3) В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко., Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы, Известия РАН, серия Математика, 81:4, 2017, с.20-67.