Секция «Геометрия и топология»

Полулокальные особенности эллиптического биллиарда с потенциалом малого порядка

Пустовойтов Сергей Евгеньевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: pustovoitovse1@mail.ru

Рассмотрим математический биллиард внутри эллипса с уравнением $x^2/a + y^2/b = 1$ с абсолютно упругим отражением от границы. Положим, что на биллиардный шар действует потенциал вида

$$W = c0((x^2 + y^2 - a - b)^2 + ay^2 + bx^2 - ab) + c1(x^2 + y^2 - a - b),$$

где $c0, c1 \in \mathbb{R}$ – параметры потенциала. Такой биллиард является гамильтоновой системой на фазовом пространстве M^4 с гамильтонианом

$$H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + W.$$

Более того, такая система допускает дополнительный первый интеграл вида

$$F = \frac{b\dot{x}^2 + a\dot{y}^2}{2} - \frac{(y\dot{x} - x\dot{y})^2}{2} + (c0(x^2 + y^2 - a - b) + c1)(ay^2 + bx^2 - ab),$$

который независим от гамильтониана и коммутирует с ним. Таким образом, биллиард является интегрируемой по Лиувиллю системой.

Ранее автором была изучена структура слоения Лиувилля невырожденных изоэнергетических многообразий $Q^3 = \{H = const\}$ такого биллиарда. В частности, были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для всевозможных невырожденных значений гамильтониана. Изучим теперь структуру слоения в окрестности слоев, содержащих невырожденную особую точку ранга ноль. Как известно, такие точки делятся на четыре типа: центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус. Оказывается, точки типа фокус-фокус не встречаются в нашем биллиарде. Оставшиеся же три типа имеют место. Более того, верна следующая теорема.

Теорема. *Слоение Лиувилля эллиптического биллиарда с потенциалом четвертой степени в окрестности особого слоя, содержащего точку типа центр-седло, устроенно как прямое произведение 2-диска на один из следующих 2-атомов: B, B_2, C_2 и C_4. При этом слоение Лиувилля окрестности особого слоя типа седло-седло устроенно как полупрямое произведение $B \times C_2/\mathbb{Z}_2$, $B_2 \times C_2/\mathbb{Z}_2$ или $B \times C_4/\mathbb{Z}_2$.*

Источники и литература

1) Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде.//Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.
2) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: РХД, 1999.