Секция «Геометрия и топология»

Геометрия выпуклых многогранников бинарных деревьев малых размерностей

Марханов Дмитрий Алексеевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теоретической механики и мехатроники,
Москва, Россия
E-mail: demetryfotball@gmail.com

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства возникла в результате синтеза двух классических задач: проблема Штейнера о кратчайших сетях и проблемы Громова о минимальных заполнениях [1]. При изучении минимальных заполнений возникают многомерные выпуклые многогранники, представляющие собой множества допустимых значений переменных двойственной задачи линейного программирования, задающей минимальное заполнение фиксированного типа [2]. В качестве типов достаточно рассматривать так называемые бинарные деревья (деревья, степени вершин которых равны 1 или 3, причем вершины степени 1 — это в точности точки метрического пространства). Таким образом, каждому бинарному дереву T с занумерованными вершинами степени 1 соответствует выпуклый многогранник $W(T)$. Более того, экспериментальный факт состоит в том, что если рассмотреть множество вершин многогранников всевозможных таких деревьев с фиксированным числом n вершин степени 1, то снова получается множество вершин некоторого выпуклого многогранника $W(n)$. В работе исследуется устройство многогранников $W(n)$ для метрических пространств для небольших значений n.

В случае $n = 5$ точек каждому из 15 бинарных деревьев T с пятью вершинами степени 1 соответствует трехмерный тетраэдр $W(T)$, а многогранник $W(5)$ оказывается 5-мерным многогранником в 10-мерном пространстве.

С помощью компьютерных вычислений найден f-вектор многогранника $W(5)$ (это вектор, компоненты которого равны числу граней соответствующей размерности). Он равен (12,60,120,90,20), т.е. многогранник имеет 12 вершин, 60 ребер, и так далее. Все гиперграни оказались равными друг другу 4-мерными многогранниками с f-вектором (6,15,18,9). Они комбинаторно изоморфны известному многограннику $B(k)$ фон Неймана-Биргкгофа для $k = 3$. Трехмерные грани - это тетраэдры, из них 15 соответствуют 15 тетраэдрам $W(T)$, построенным по конкретным типам заполнений. Вес минимального заполнения пространства M может быть найден как минимакс линейной функции, коэффициенты которой суть элементы матрицы расстояний пространства M, а максимумы берутся по этим 15 трехмерным граням.

В случае $n = 6$ ситуация усложняется тем, что возникают неизоморфные типы бинарных деревьев. Типу с двумя усами соответствует 6-мерный многогранник с f-вектором (8,26,45,45,26,8), а типу с тремя 6-мерный многогранник в 15-мерном пространстве (12,54,110,108,52,12). Выпуклость многогранника $W(6)$ проверена на компьютере. Он имеет 120 вершин.

Источники и литература

1) А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, Матем. сб., 203:5 (2012), 65–11
2) А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Минимальные заполнения и двойственная задача линейного программирования”. 2019.