Классификация критических точек гладких инвариантных функций

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Онуфриенко Мария Викторовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: mary.onufrienko@gmail.com

В докладе будет рассказано о классификации особенностей гладких функций двух переменных, инвариантных относительно действия конечной группы G поворотами. Получена классификация критических точек, возникающих в типичных параметрических семействах G-инвариантных гладких функций с числом параметров, не превосходящим двух, когда $|G| \neq 4$. Получен критерий для приводимости гладкой G-инвариантной функции к нормальной форме, когда многочлен Тейлора степени $|G|$ функции не является многочленом от x^2+y^2 и G-кратность Милнора (соответственно, G-коразмерность) особенности меньше, чем $|G|$ (соответственно, $|G|/2$). Получен критерий для приводимости гладкого параметрического семейства G-инвариантных функций к нормальной форме вблизи критической точки рассматриваемого типа. Критерии даны в терминах частных производных функции в критической точке. В качестве приложения получена классификация особенностей коранга 1 «типичных» интегрируемых систем с 2 и 3 степенями свободы.

Перейдем к точным формулировкам. Зафиксируем натуральное число s и рассмотрим циклическую группу $G \subset SO(2)$ порядка s, состоящую из поворотов $z \mapsto e^{2\pi\ell i/s}z$ плоскости $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, где $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $0 \leq \ell < s$. Можно показать, что любая гладкая G-инвариантная функция $f(x,y)$ имеет ряд Тейлора в точке $(0,0)$ вида

$$\mathrm{Re}\sum_{p,q\geq 0} c_{pq}|z|^{2p}z^{qs}, \quad \text{где} \quad c_{p,0} = \frac{1}{p!^2}f^{(2p)}_{z^p\bar{z}^p}(0,0), \quad c_{p,q} = \frac{2}{(p+sq)!p!}f^{(2p+sq)}_{z^{p+sq}\bar{z}^p}(0,0),\ q>0. \tag{1}$$

Определение ([1])**.** *Пусть $f = f(x,y)$ — гладкая G-инвариантная функция, заданная в окрестности точки $(0,0)$, где $|G| = s \geq 2$. Будем говорить, что функция f имеет* G-регулярную особенность *в точке $(0,0)$, если $f^{(2)}_{z\bar{z}}(0,0) \neq 0$ или $f^{(s)}_{z^s}(0,0) \neq 0$. Будем говорить, что G-регулярная особенность имеет* тип $k \in \mathbb{Z}_+$, *если коэффициенты ряда Тейлора* (1) *удовлетворяют следующей системе k уравнений и одному неравенству:*

(i) *при $k < s/2-1$ выполнено $f^{(2j)}_{z^j\bar{z}^j}(0,0) = 0$, $1 \leq j \leq k$, и $f^{(2k+2)}_{z^{k+1}\bar{z}^{k+1}}(0,0) \neq 0$;*

(ii) *если $k \geq s/2-1$ и s нечетно, то $k = (s-1)/2$ и $f^{(2j)}_{z^j\bar{z}^j}(0,0) = 0$, $1 \leq j \leq k$;*

(iii) *если $k = s/2-1$, то $f^{(2j)}_{z^j\bar{z}^j}(0,0) = 0$, $1 \leq j < s/2$, и $f^{(s)}_{z^{s/2}\bar{z}^{s/2}}(0,0)^2 \neq 4\frac{(s/2)!^4}{s!^2}|f^{(s)}_{z^s}(0,0)|^2$;*

(iv) *при $k \geq s/2$ (откуда s четно) многочлен Тейлора степени s функции $f(x,y) - f(0,0)$ является однородным многочленом степени s и является полным квадратом, т.е. имеет вид $P_s(x,y) = \mathrm{Re}(c_{0,1}z^s) + c_{s/2,0}|z|^s$, где $c^2_{s/2,0} = |c_{0,1}|^2$, и выполнено следующее условие на многочлен Тейлора степени $2(k+1)$. Нетрудно показать, что этот многочлен можно привести к виду $P_s(\tilde{x},\tilde{y}) + \sum_{j=s/2+1}^{k+1}\tilde{c}_{j,0}|\tilde{z}|^{2j}$ с помощью замены переменных вида $\tilde{z} = zQ$, где $Q = Q(|z|^2, z^s)$ — многочлен степени $2k+2-s$ с комплексными коэффициентами, $Q(0,0) = 1$. Условие состоит в следующем: $\tilde{c}_{s/2+1,0} = \ldots = \tilde{c}_{k,0} = 0$ и $\tilde{c}_{k+1,0} \neq 0$.*

Следствие ([1])**.** *Пусть $f = f(x,y)$ — гладкая G-инвариантная функция, где $|G| = s \geq 3$. Тогда f не имеет в нуле G-регулярной особенности никакого из типов $k \in \{0,1,2\}$ тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

- *верна система трех уравнений* $f^{(2)}_{z\bar z}(0,0)=0$, $\mathrm{Re} f^{(s)}_{z^s}(0,0)=0$, $\mathrm{Im} f^{(s)}_{z^s}(0,0)=0$,
- $s=4$ *и верна система трех уравнений* $f^{(2)}_{z\bar z}(0,0)=0$, $9f^{(4)}_{z^2\bar z^2}(0,0)^2=|f^{(s)}_{z^4}(0,0)|^2$, $f^{(6)}_{\bar z^3\bar z^3}(0,0)=0$.

Таким образом, в типичных 2-параметрических семействах гладких G-инвариантных функций встречаются только G-регулярные особенности в нуле типов $k\in\{0,1,2\}$.

В качестве примера G-регулярной особенности любого типа k рассмотрим функцию

$$f_{s,k,a}(x,y)=\sum_{i=1}^{m} a_i|z|^{2(k+i)}+\begin{cases} \pm|z|^2, & s>2,\ k=0 \text{ (случай i)},\\ \pm x^2\pm y^2, & s=2,\ k=0 \text{ (случай iii)},\\ \mathrm{Re}(z^s), & 0<k<s/2 \text{ (случаи i—iii)},\\ \mathrm{Re}(z^s)\pm|z|^s, & \text{четное } s>2,\ k\ge s/2 \text{ (случай iv)},\\ \mathrm{Re}(z^2)\pm|z|^2\pm|z|^{2(k+1)}, & s=2, k\ge 1 \text{ (случай iv)},\end{cases}$$

где $a=(a_i)\in\mathbb{R}^m$ — параметры (*«модули»*), $m=\min(k,[s/2]-1)$ — *модальность*, $a_1\neq 0$ при $k\notin\{s/2-1,(s-1)/2\}$, $a_1\neq\pm1$ при $k=s/2-1$, $k<s/2$ при нечетном s. Рассмотрим $(m+k)$-параметрическое семейство G-инвариантных функций вблизи начала координат:

$$F_{s,k,a}(\mathbf{z},\nu)=f_{s,k,a}(\mathbf{z})+\sum_{j=1}^{k}\nu_j|z|^{2j},$$

где $\nu=(\nu_j)\in\mathbb{R}^k$ — «малые» параметры, $\mathbf{z}=(x,y)$, $z=x+iy$.

Теорема ([1])**.** (A) *Пусть* $G\subset SO(2)$ *— конечная группа порядка* $s\ge 2$ *и* $k<s/2$ *(случаи i—iii). Гладкая* G*-инвариантная функция* $f=f(x,y)$ *имеет в нуле* G*-регулярную особенность типа* k *тогда и только тогда, когда* $\exists$ *гладкая* G*-эквивариантная замена* $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\mathbf{z})$, $\det\frac{\partial\mathbf{w}(0,0)}{\partial\mathbf{z}}\neq 0$, *приводящая функцию* $f(\mathbf{z})$ *к нормальной форме* $f_{s,k,a}(\mathbf{w})$, *т.е.*

$$f(\mathbf{z})=f_{s,k,a}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))+\mathrm{const}$$

для некоторого $a=(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{R}^m$*. Более того,* G*-кратность Милнора,* G*-модальность и* G*-коразмерность ростка* f *в нуле равны* $\mu=m+k+1$, m *и* k*, соответственно.*

(B) *Пусть* $F=F(x,y,\lambda)$ *— параметрическое семейство* G*-инвариантных функций с параметрами* $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ *такое, что* $F(x,y,0)=f(x,y)$ *— функция из (A). Тогда в некоторой окрестности нуля в* $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^l$ *существует гладкое семейство* G*-эквивариантных замен* $\mathbf{w}(\mathbf{z},\lambda)$, $\det\frac{\partial\mathbf{w}(0,0,0)}{\partial\mathbf{z}}\neq 0$, *которое приводит* F *к нормальной форме* $F_{s,k,a}(\mathbf{w},\nu)$*, т.е.*

$$F(\mathbf{z},\lambda)=F_{s,k,a(\lambda)}(\mathbf{w}(\mathbf{z},\lambda),\nu(\lambda))+\mathrm{const} \qquad (2)$$

для некоторых функций $a_i(\lambda)$, $1\le i\le m$, *и* $\nu_j(\lambda)$, $1\le j\le k$, *таких, что* $\nu_j(0)=0$.

Таким образом, согласно следствию и теореме, при $s=|G|\neq 4$ типичные параметрические семейства гладких G-инвариантных функций с не более чем двумя параметрами приводятся к виду (2), где $k\in\{0,1,2\}$. Наши результаты не следуют из классификации [2] G-инвариантных особенностей, G-кратность Милнора которых не превосходит 4.

Автор благодарен Е.А.Кудрявцевой за постановку задачи и ценные обсуждения. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

1) Kudryavtseva E.A., Onufrienko M.V. Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. V. 30. No. 1. P. 76–94.
2) Wassermann G. Classification of singularities with compact Abelian symmetry // Singularities. Banach Center Publications. PWN, Warsaw, 1988. V. 20. P. 475–498; Preprint, Univ. Regensburg, 1976.