Об обобщении метода Садетова на задачу о построении полных биинволютивных наборов на коалгебре Ли

Лобзин Фёдор Игоревич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: fiadat@mail.ru

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, соответственно $\mathfrak{g}^*$ — сопряженное пространство. Рассмотрим на $\mathfrak{g}^*$ структуру:

$$\mathcal{A}_x(x) = (c_{ij}^k x_k),\ x \in \mathfrak{g}^*$$

Данный тензор определяет скобку Пуассона — Ли на $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$: $\{f, g\}(x) = \mathcal{A}_x(df(x), dg(x)$. Функции $f \in C^\infty$, лежащие в ядре скобки Пуассона — Ли, называются функциями Казимира. Так же можно рассмотреть похожую структуру, называемую скобкой с замороженным аргументом:

$$\mathcal{A}_a(x) = (c_{ij}^k a_k),\ a, x \in \mathfrak{g}^*, \quad \{f, g\}_a(x) = \mathcal{A}_a(df(x), dg(x))$$

Алгебра Ли называется вполне интегрируемой, если на ней найдется полный набор функций, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона —Ли. Полным считается набор, содержащий в себе n функционально независимых функций, где n определяется формулой:

$$n = \frac{1}{2}(dim\ \mathfrak{g} + ind\ \mathfrak{g}).$$

Наибольший практический интерес представляют наборы, состоящие из многочленов. Во второй половине прошлого века была сформирована гипотеза, касающиеся существования полных наборов в инволюции.

Гипотеза Мищенко — Фоменко.[доказана] На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в инволюции относительно $\{\cdot, \cdot\}$.

Для построения таких наборов удобно пользоваться методом сдвига аргумента. Отметим, что получившиеся сдвигом наборы будут также в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом, так что интересно рассмотреть естественное обобщение этой гипотезы, предложенное в [1].

Обобщенная гипотеза Мищенко — Фоменко. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для всех регулярных a из коалгебры на $\mathfrak{g}^*$ существует полный набор полиномов в биинволюции, то есть набор, одновременно находящийся в инволюции относительно $\{\cdot, \cdot\}$ и $\{\cdot, \cdot\}_a$.

Полученные при применении метода сдвига аргумента наборы являются полными не для всех алгебр Ли. Также эти наборы функционально независимы не для всех a. Первая гипотеза была доказана Садэтовым в 2004 году (см.[2]), но полученные его алгоритмом наборы не всегда оказываются в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Обобщенная гипотеза Мищенко—Фоменко доказана, например, для полупростых алгебр Ли (см.[1]). Данный доклад будет посвящен попытке обобщить метод Садетова на задачу о построении биинволютивных наборов.

На докладе будет представлен результат, который основан на методе Садетова и позволяет свести задачу о построении полного биинволютивного набора многочленов на некоторых алгебрах к той же задаче на алгебре меньшей размерности.

Теорема. Пусть a — некоторый ковектор равный нулю на коммутативном идеале или одномерном идеале, который не лежит в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда существуем алгебра Ли $\mathfrak{L}_{\mathfrak{h}}$ и функционал $a^{'}$ на ней такие, что задача о построении полного биинволютивного набора многочленов в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ относительно a, сводится к такой же задаче над $\mathcal{S}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{h}})$ и $a^{'}$. Причем размерность $\mathfrak{L}_{\mathfrak{h}}$ меньше размерности $\mathfrak{g}$.

Из этой теоремы и утверждений из моей предыдущей работы следует утверждение:

Следствие. Рассмотрим полупрямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \bigoplus V$ компактной алгебры Ли $\mathfrak{l}$ и произвольного векторного пространства V. Пусть a ковектор такой, что $a|_V = 0$, тогда существует полный биинволютивный (инвлютивный относительно $\mathcal{A}_x(x)$ и $\mathcal{A}_a(x)$) набор многочленов над соответствующими коалгебрами.

Источники и литература

1) *Bolsinov A. V., Zhang P.* Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras //Transformation Groups. – 2016. – Т. 21. – №. 1. – С. 51-86.
2) *Sadetov S. T.* A proof of the Mishchenko-Fomenko conjecture //Doklady Mathematics. – Pleiades Publishing, Ltd. (Плеадес Паблишинг, Лтд), 2004. – Т. 70. – №. 1. – С. 635-638.