Секция «Геометрия и топология»

Бифуркационная кривая осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского

Агуреева Екатерина Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: agureevamath@yandex.ru

В работе [1] были рассмотрены псевдоевклидовы аналоги известных интегрируемых систем механики. Топологические и динамические свойства таких систем существенно отличаются от классических систем в евклидовых пространствах.

Рассмотрим простанство $\mathbb{C}^6$ с координатами $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$ и выполним преобразование вида

$$J_1 = \frac{\vec{J_1}}{i},\ J_2 = \frac{\vec{J_2}}{i},\ J_3 = \vec{J_3},\ x_1 = \frac{\vec{x_1}}{i},\ x_2 = \frac{\vec{x_2}}{i},\ x_3 = \vec{x_3}$$

.

При этом скобка Пуассона алгебры Ли $e(3)$ группы движений евклидова трехмерного пространства перейдет в скобку алгебры Ли $e(2,1)$ группы движений псевдоевклидова пространства.

Псевдоевклидовым аналогом системы Жуковского будем называть систему, заданную следующей функцией H при помощи скобки Пуассона алгебры $e(2,1)$:

$$H = \frac{(J_1+\lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2+\lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3+\lambda_3)^2}{2A_3}.$$

Здесь положительные $A_{1,\,2,\,3}$ соответствуют главным моментам инерции, а вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ вектору постоянного гиростатического момента. Данная система интегрируема, и первый интеграл $K : \{K, H\} = 0$ имеет вид

$$K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k,$$

Утверждение 1. Множества критических точек отображения момента псевдо-евклидовой и евклидовой систем Жуковского совпадают.

Как и для псевдоевклидова аналога случая Эйлера [2], гамильтониан и первый интеграл системы Жуковского зависят от только от трех скоростей J_1, J_2, J_3.

Утверждение 2. Класс гомеоморфности пересечения поверхностей $f_1 = a, f_2 = b$ для фиксированного J_1, J_2, J_3 зависит только от значений $f_1 = a, f_2 = b, K = k$.

Тем самым, каждый слой слоения Лиувилля системы в R^6 представляется как расслоение с базой $H = h, K = k$ в пространстве $R^3(J_1, J_2, J_3)$ и слоем $f_1 = a, f_2 = b$ в пространстве $R^3(x_1, x_2, x_3)$.

В пространстве $R^3(J_1, J_2, J_3)$ опишем тип пересечения двух квадрик $H = h, K = k$. Рассмотрев уровень $K = k$ и функцию H на нем, найдем критические точки.

Утверждение 3. При попарно различных A_1, A_2, A_3 и $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ образ множества критических точек функции H на квадриках $K = k$ составляет параметрическую кривую $k(t), h(t)$:

$$h(t) = \frac{t^2}{2}\left(\frac{A_1\lambda_1^2}{(1+2A_1t)^2} + \frac{A_2\lambda_2^2}{(1+2A_2t)^2} - \frac{A_3\lambda_3^2}{(1+2A_3t)^2}\right),$$
$$k(t) = \frac{A_1^2\lambda_1^2}{(1+2A_1t)^2} + \frac{A_2^2\lambda_2^2}{(1+2A_2t)^2} - \frac{A_3^2\lambda_3^2}{(1+2A_3t)^2}.$$

В нашем докладе мы опишем свойства этой кривой в зависимости от параметров системы $\alpha = \frac{A_3}{A_1}, \beta = \frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}$ (моментов инерции и компонент вектора гиростатического момента) в случае осесимметричного тела: $A_1 = A_2$.

Источники и литература

1) A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces”, Russ. J. Math. Phys., 23:4 (2016), 431–454.
2) М.К. Алтуев, В.А. Кибкало, "Топологический анализ псевдо-евклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров Матем. сб., 214:3 (2023), 3–19