Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вероятности достижений для случайных блужданий с границами

Научный руководитель – Замятин Андрей Андреевич

Краснов Иван Вячеславович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: i.v.krasnov96@gmail.com

Рассматривается однородная по времени марковская цепь $\xi_n = (\xi_n^1, \xi_n^2)$ с пространством состояний $\mathbb{Z}_+ \times \{0, 1, \dots, N\}$.

Переходные вероятности зададим следующим образом $p_{l_1,j_1}^{l,j} = \mathbf{P}(\xi_{n+1} = (l_1, j_1) | \xi_n = (l, j))$.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

- Цепь ξ_n является неприводимой и непериодичной;
- Ограниченность скачков по первой координате, то есть при $|l - l_1| > 1$ выполнено $p_{l_1,j_1}^{l,j} = 0$;
- Пространственная однородность по первой координате, то есть $p_{l_1,j_1}^{l,j} = p_{l_1-l,j_1}^{0,j}$.

Вслед за [1] определим индуцированную цепь Маркова на пространстве состояний $\{0, 1, \dots, N\}$ с переходными вероятностями $p_{j_1}^{j} = p_{l+1,j_1}^{l,j} + p_{l,j_1}^{l,j} + p_{l-1,j_1}^{l,j}$.

Зададим вектор сноса как $v = \sum_{j=0}^{N} \pi_j m_j$, где π_j – стационарное распределение индуцированной цепи, а m_j, т. е. $m_j = E(\xi_{n+1}^1 - \xi_n^1 | \xi_n^2 = j),\ j \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Определим также вероятность $h_{0,j}^{i_0,j_0}$ как вероятность того, что точка $(0, j)$ достигается марковской цепью раньше, чем любая другая точка $(0, l)$, где $l \neq j,\ l \in \{0, 1, \dots, N\}$, при условии начального состояния (i_0, j_0).

Будет построена вложенная марковская цепь η_k с пространством состояний $\{0, 1, \dots, N\}$ и стационарным распределением $\nu = (\nu_j,\ j = 0, 1, \dots, N)$ и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $v \leq 0$, тогда*

1) *При $i_0 \to \infty$ вероятность достижения сходится к соответствующей стационарной вероятности вложенной цепи η_k.*
$$h_{0,j}^{i_0,j_0} \to \nu_j,\ j = 0, 1, \dots, N.$$
Кроме того, будет показано, что скорость сходимости экспоненциально быстрая
$$\sum_{j=0}^{N} |h_{0,j}^{i_0,j_0} - \nu_j| < C\alpha^{i_0},\ 0 < \alpha < 1.$$

2) *Для любых $j_0, j_1 \in \{0, 1, \dots, N\}$ при $i_0 \to \infty$*
$$h_{0,j}^{i_0,j_0} - h_{0,j}^{i_0,j_1} = O(\alpha^{i_0}).$$

Список литературы

[1] G. Fayolle, V. Malyshev and M. Menshikov (1995). Topics in the constructive theory of countable Markov chains. Cambridge University Press, Cambridge