Об асимптотике вероятностей больших уклонений для пары сумм

Ходякова Мария Александровна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: khodyakova.mari@mail.ru

В работе рассматривается решение следующей задачи. Пусть X_i, $i = 1, \ldots, n$ – независимые одинаково распределённые нерешётчатые величины, Y_j, $j = 1, \ldots, m$ – независимые одинаково распределённые нерешётчатые величины, для которых выполнено условие Крамера: $\mathsf{E}e^{hX_1}$ конечно при $h \in [h_1^-, h_1^+]$ для некоторых $h_1^- \le 0 \le h_1^+$, $\mathsf{E}e^{hY_1}$ конечно при $h \in [h_2^-, h_2^+]$ для некоторых $h_2^- \le 0 \le h_2^+$. Пусть f и g – некоторые положительные равномерно ограниченные и равномерно отделённые от нуля функции, $a_i = f(i/n)$ при $i \le n$, $b_j = g(j/m)$ при $j \le m$. Пусть

$$S_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \quad S_{m,2} = \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j.$$

Предположим, что $n, m \to \infty$, $n/(n+m) \to p$, где $p \in (0,1)$. Вероятность $\mathsf{P}(S_{n,1} > S_{m,2})$ в условиях

$$pm_1 < (1-p)m_2, \quad m_1 = \int_0^1 f(x)dx, \quad m_2 = \int_0^1 g(x)dx$$

стремится к нулю в силу закона больших чисел Чебышёва. Зададимся вопросом об асимптотическом поведении данной вероятности.

Пусть $R_1(h) = \mathsf{E}e^{hX_1}$, $h \in [h_1^-, h_1^+]$, $\mathsf{E}X_1^2 e^{h_1^- X_1}$ и $\mathsf{E}X_1^2 e^{h_1^+ X_1}$ конечны, пусть $R_2(h) = \mathsf{E}e^{hY_1}$, $h \in [h_2^-, h_2^+]$, $\mathsf{E}Y_1^2 e^{h_2^- Y_1}$ и $\mathsf{E}Y_1^2 e^{h_2^+ Y_1}$ конечны. В статье И.В. Соболева, А.В. Шкляева [1] рассматривается асимптотика вероятности попадания взвешенной суммы $S_{n,1}$ в промежуток $[x, x+\Delta_n]$ при $n \to +\infty$ и всех Δ_n, стремящихся к нулю достаточно медленно. В настоящей работе показано, что верна асимптотика

$$\mathsf{P}(S_{n,1} > S_{m,2}) = \frac{C(h^*)\,(1+o(1))}{\sqrt{2\pi(n+m)}B(h^*)h^*} \exp\left(n\int_0^1 \ln R_1(f(t)h^*)dt + m\int_0^1 \ln R_2(-g(t)h^*)dt \right),$$
$$n, m \to +\infty, \quad \frac{n}{n+m} \to p \in (0,1),$$

где при $m_i(h) = (\ln R_i(h))'$, $i = 1, 2$,

$$C(h) = \sqrt{\frac{R_1(f(1)h)}{R_1(f(0)h)}}\sqrt{\frac{R_2(-g(1)h)}{R_2(-g(0)h)}},$$
$$B(h) = p\int_0^1 f^2(t)m_1'(f(t)h)dt + (1-p)\int_0^1 g^2(t)m_2'(-g(t)h)dt,$$

h^* и x^* определяются равенствами

$$n\int_0^1 m_1\left(f(t)h^*\right)f(t)dt = m\int_0^1 m_2\left(-g(t)h^*\right)g(t)dt = x^*,$$

$$\max\left(\frac{h_1^-}{\max_{t\in[0,1]} f(t)}, -\frac{h_2^+}{\max_{t\in[0,1]} g(t)}\right) \le h^* \le \max\left(\frac{h_1^+}{\max_{t\in[0,1]} f(t)}, -\frac{h_2^-}{\max_{t\in[0,1]} g(t)}\right).$$

Полученный результат можно применить для нахождения асимптотики вероятности победы в сражении двух больших команд по n и m гладиаторов с силами $a_i = f(i/n)$, $i \le n$, и $b_j = g(j/m)$, $j \le m$, соответственно, которое происходит по вероятностному механизму модели Каминского ([2]).

Список литературы

[1] Соболев И. В., Шкляев А. В., Большие уклонения для взвешенных сумм независимых одинаково распределённых величин с функционально заданными весами // Фундаментальная и прикладная математика. – 2020. – Т. 23. – №. 1. – С. 191-206.

[2] Kaminsky K. S., Luks E. M., Nelson P. I., Strategy, nontransitive dominance and the exponential distribution // Australian Journal of Statistics. – 1984. – Vol. 26, no. 2. – P.111-118.