Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О стремлении к равномерному распределению остатков от деления на 2, 3, 4 сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин

Научный руководитель – Кондратенко Александр Евгеньевич

Чернышова Дарья Андреевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: d.chernyshova.01@mail.ru

УДК 519.21, 517.926,
Чернышова Д.А.
Chernyshova D.A.
Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова
Moscow, Lomonosov Moscow State University
daria.chernyshova@math.msu.ru

О стремлении к равномерному распределению остатков от деления на 2, 3, 4 сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин

On the desire for a uniform distribution of the residuals from division on 2, 3, 4 of convolutions of equally distributed Poisson random variables

В докладе рассказывается о стремлении к равномерному распределению остатков от деления на 2, 3, 4 сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин и стремлении к максимально возможному значению с ростом числа слагаемых.

The report describes on the desire for a uniform distribution of the residues from division on 2, 3, 4 of convolutions of equally distributed Poisson random variables and the desire for the maximum possible value with an increase in the number of terms.

Ключевые слова: свертка, дробная часть, равномерное распределение, пуассоновское распределение

Keywords: convolution, fractional part, uniform distribution, Poisson distribution

На XIV международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета, было рассказано об информационном свойстве свертки с равномерным распределением [1, 2]:

Теорема 1.

Пусть целочисленная случайная величина ξ и равномерная на $\{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ случайная величина η независимы.

Тогда остаток от деления на N свертки $\xi+\eta$ также равномерно распределен на $\{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$;

Теорема 2.

Пусть случайная величина ξ и равномерная на отрезке $[0; 1]$ случайная величина η независимы.

Тогда дробная часть свертки $\xi + \eta$ распределена также равномерно на $[0; 1]$.

На III Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» было предложено обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части и рассказано о сохранении информационного свойства свертки в неканонических случаях [3, 4].

Благодаря центральной предельной теореме хорошо известно, что сумма независимых одинаково распределенных случайных величин при соответствующей нормировке сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине (однако свертка нормальной случайной величины с произвольной, вообще говоря, не является нормальной). Возникает естественный вопрос о сходимости дробной части свертки одинаково распределенных случайных величин к равномерному распределению, то есть о росте энтропии дробной части свертки и ее максимизации. Пока получен ответ в следующих частных случаях.

Утверждение 1.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром λ, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Тогда остатки от деления свертки этих случайных величин на 2 стремятся к равномерному распределению на $0, 1$.

Т.е.

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_2 = 0) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2\lambda n}}{2} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$$

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_2 = 1) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2\lambda n}}{2} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$$

Утверждение 2.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром λ, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Тогда остатки от деления свертки этих случайных величин на 3 стремятся к равномерному распределению на $0, 1, 2$.

Т.е.

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_3 = 0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} \to \frac{1}{3}, \quad n \to \infty$$

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_3 = 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} \to \frac{1}{3}, \quad n \to \infty$$

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_3 = 2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} \to \frac{1}{3}, \quad n \to \infty$$

Утверждение 3.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром λ, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Тогда остатки от деления свертки этих случайных величин на 4 стремятся к равномерному распределению на $0, 1, 2, 3$.

Т.е.

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_4 = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \cos\lambda n \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty$$

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_4 = 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \sin\lambda n \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty$$

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_4 = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \cos\lambda n \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty$$

$$\mathsf{P}(\{\eta_n\}_4 = 3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \sin \lambda n \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty$$

Таким образом, в частном случае показано, что дробные части сверток сходятся по распределению к равномерным случайным величинам.

Список литературы

[1] *1. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* Об информационном свойстве свертки с равномерным распределением // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XIV Международной конференции (г. Махачкала, 16–19 сентября 2021 г.). - Махачкала, издательство ДГУ. - 2021. - С. 135-138.

[2] *2. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки - 2022. - № 1. - С. 7-11.

[3] *2. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* О сохранении информационного свойства свертки в неканоническом случае // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы III Всероссийской конференции (г. Махачкала, 7-9 февраля 2022 г.). - Махачкала, издательство ДГУ. - 2022 - С. 105-108.

[4] *2. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. - 2022. - № 1. - С. 45-52.