Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Асимптотические свойства выпуклых оболочек случайных блужданий с возможной генерацией частиц. Моделирование.

Мыслюк Александр Олегович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: sanya.mysliuk@mail.ru

В 1961 году в [1] была опубликована комбинаторная лемма Бакстера. Для формулировки леммы потребуется условие, налагаемое на конечное множество векторов. Пусть $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ — векторы на плоскости. $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. $Z_A := \sum\limits_{j=1}^{k} Z_{i_j}$. Если из коллинеарности Z_A и Z_B следует, что $A = B$, то будем говорить что наша система векторов удовлетворяет условию ($\mathbf{B}$). Комбинаторная лемма Бакстера формулируется следующим образом:

Лемма Бакстера [1, лемма 1]. *Пусть векторы $Z_1, \ldots, Z_n$ удовлетворяют (**B**), $S_0 := 0$, $S_k := \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$. Тогда существует ровно одна циклическая перестановка векторов $Z_1, \ldots, Z_n$, такая что $S_1, \ldots, S_{n-1}$ лежат справа (слева) относительно прямой S_0S_n.*

Основной целью работы являлось обобщение и применение комбинаторной леммы Бакстера для случая произвольной размерности d, а также исследование выпуклых оболочек ветвящихся случайных блужданий с непрерывным временем в $\mathbb{Z}^d$ с помощью моделирования.

Обобщим условие ($\mathbf{B}$) на случай произвольной размерности d. Пусть $B_1, \ldots, B_{d-1}$ — подмножества индексов $\{1, \ldots, n\}$, для которых $B_1 \subset \cdots \subset B_{d-1}$. Будем говорить, что векторы $Z_1, \ldots, Z_n$ удовлетворяют условию ($\mathbf{K}$), если:

1) векторы $Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы;

2) для всякого подмножества индексов A, отличного от $B_1, \ldots, B_{d-1}$, верно, что $Z_A \neq Z_{B_i} - Z_{B_j}$ ни для каких $j \leq i$, причём векторы $Z_A, Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы.

Обобщение комбинаторной леммы формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Пусть множество векторов $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ удовлетворяет условию (**K**), $\{B = 0, i_1, \ldots, i_{d-2}, n\}$ — некоторый упорядоченный поднабор индексов. $A := \{Z_{i_k+1}, \ldots, Z_{i_{k+1}}\}$ для некоторого $0 \leq k \leq d-2$. Тогда существует ровно одна циклическая перестановка σ векторов из A, такая что ломанная, соединяющая точки S_{i_k} и $S_{i_{k+1}}$ будет полностью лежать в правом (левом) полупространстве относительно гиперплоскости Ω, проходящей через точки $\{0, S_{i_1}, \ldots, S_{i_{d-2}}, S_{i_n}\}$.*

Следствием этого обобщения является результат, позволяющий считать асимптотики математических ожиданий некоторых характеристик выпуклых оболочек. Пусть отображение $g(x_1, \ldots, x_{d-1})$ — симметрическое отображение $d-1$ переменных. Пусть набор индексов $i_0 < \cdots < i_{d-1}$ определяет некоторую грань D выпуклой оболочки H_n. Рассмотрим случайную величину $G_n = \sum\limits_{D \in \partial H_n} g(S_{i_1} - S_{i_0}, S_{i_2} - S_{i_1}, \ldots, S_{i_{d-1}} - S_{i_{d-2}})$. Тогда соответствующая теорема формулируется следующим образом:

Теорема 2. *Пусть скачки $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ удовлетворяют условию (**K**) для всякого n, тогда*

$$\mathsf{E}(G_n) = \sum_{1\le M_1<\dots<M_{d-1}\le n} \frac{2\,\mathsf{E}(g(S_{M_1}, S_{M_2}-S_{M_1}, \dots, S_{M_{d-1}}-S_{M_{d-2}}))}{M_1\cdot(M_2-M_1)\cdots(M_{d-1}-M_{d-2})}.$$

Вторая часть работы посвящена исследованию выпуклых оболочек ветвящихся случайных блужданий на на многомерных решётках, когда в основе процесса лежит простое симметричное случайное блуждание. Модель полностью описана в [3]. Для этого случая, а также для случая, когда существует один источник ветвления было проведено моделирование на основе статьи [4] и получены асимптотики числа вершин и граней выпуклых оболочек. Вместе с результатами моделирования также будут приведены алгоритмы моделирования выпуклых оболочек, которые были использованы.

Источники и литература

1) *Baxter G.* A combinatorial lemma for complex numbers // Ann. Math. Statist., **32** (1961), 901-904.
2) *Vysotsky V., Zaporozhets D.* Convex hulls of multidimensional random walks // Trans. Amer. Math. Soc., **370**:11 (2018), 7985-8012.
3) *Яровая, Е. Б.* Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. // М.: ЦПИ при мехмате Моск. ун-та (2007), 104.
4) *Ермишкина, Е. М., Яровая, Е. Б.* Моделирование ветвящихся случайных блужданий по многомерной решётке. // Фундаментальная и прикладная математика, **22**.3 (2018): 37-56.