

Нахождение достаточных условий для транзиентности решения стохастических дифференциальных уравнений с переключением.

Мосиевич Кирилл Викторович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: kirillmosievich@gmail.com

Нахождению достаточных условий для эргодичности процесса с переключениями были посвящены работы: [1, 2, 3]. В работе [1] рассматривается экспоненциальный случай, работа [2] посвящена полиномиальному случаю. Помимо изучения достаточных условий эргодичности, важно исследовать транзиентный случай, по которому можно судить об оптимальности полученных результатов в эргодическом случае. В этой работе берутся обратные, но более сильные требования (остается некоторый "зазор"), к условиям, введенным в работе [1]. Что также показывает сложность в дальнейшем "улучшении" условий в работе [1]. Перейдем к постановке задачи.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ с одномерным (\mathcal{F}_t) -согласованным винеровским процессом $W = (W_t)_{t \geq 0}$ рассмотрим одномерный стохастический процесс с переключением:

$$dX_t = b(X_t, Z_t)dt + dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x, \quad Z_0 = z, \quad (1)$$

где Z_t - марковский процесс с бинарным множеством значений $S = \{0, 1\}$ и с (положительными) интенсивностями переключения: $\lambda_{01} =: \lambda_+$, $\lambda_{10} =: \lambda_-$. Процесс Z_t имеет независимые с W распределения и согласован с фильтрацией (\mathcal{F}_t) , моменты переключения которого распределены экспоненциально. Предполагается, что интенсивности процесса переключения Z постоянны. В режиме $Z_t = 0$ процесс X_t "транзиентен", в режиме $Z_t = 1$ процесс "рекуррентен". Обозначим

$$b(x, 0) = b_-(x), \quad b(x, 1) = b_+(x),$$

$$b_+ := \|b_+(x)\| = \sup_x |b_+(x)|, \quad b_- := \|b_-(x)\| = \sup_x |b_-(x)|.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть дрейфт b_t ограничен и согласован с фильтрацией \mathcal{F}_t , и $\exists r_-, r_+ > 0$ такие, что

$$b_-(x) \geq -r_-, \quad b_+(x) \geq r_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

и

$$\frac{r_+}{\lambda_+} > \frac{r_-}{\lambda_-}.$$

Тогда $X_t \xrightarrow{n.n.} \infty, t \rightarrow \infty$.

В заключение автор выражает признательность профессору Веретенникову А. Ю. за постановку задачи и внимание к работе.

Источники и литература

- 1) Cloez B., Hairer M.: Exponential ergodicity for Markov processes with random switching. Bernoulli 21(1), 505–536 (2015)

- 2) Shao, J., Yuan C.: Stability of regime-switching processes under perturbation of transition rate matrices. *Nonlinear Anal. Hybrid Syst* 33, 211–226 (2019).
- 3) Veretennikov A.: Positive recurrence of a solution of an SDE with variable switching intensities. *Stoch PDE: Anal Comp* (2022).