Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О сходимости дробной части свертки одинаково распределенных случайных величин

Мироненко Александр Витальевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: mironenkosasha@yandex.ru

В докладе рассказывается о собственном доказательстве уже известного факта, что свёртка по модулю N любой целочисленной случайной величины и дискретной равномерной, принимающей значения 1, . . . , N − 1, имеет равномерное распределение , и развивается это утверждение для свертки независимых произвольной и абсолютно непрерывной равномерной случайных величин. Отдельно рассматривается задача о сходимости дробной части суммы независимых случайных величин с особым видом плотности на [0, 1] к равномерному распределению на [0, 1].

The report describes my own proof of the already known fact that the convolution modulo N of any integer random variable and discrete uniform, taking the values 1, . . ., N − 1, has a uniform distribution, and this statement is developed for the convolution of independent arbitrary and absolutely continuous uniform random variables. The problem of convergence of the fractional part of the sum of independent random variables with a special type of density on [0, 1] to a uniform distribution on [0, 1] is considered separately.

Ключевые слова: свертка, дробная часть, равномерное распределение
Keywords: convolution, fractional part, uniform distribution

На XIV международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета, было рассказано об информационном свойстве свертки с равномерным распределением [1-2]:

Теорема 1.
Пусть целочисленная случайная величина ξ и равномерная на $\{0, 1, \dots, N-1\}$ случайная величина η независимы. Тогда остаток от деления на N свертки $\xi + \eta$ имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределенных на $\{0, 1, \dots, N-1\}$.;
Теорема 2.
Пусть случайная величина ξ и равномерная на отрезке [0;1] случайная величина $\eta.\xi+\eta$ имеет максимальную энтропию среди всех абсолютно непрерывных случайных величин, распределенных на отрезке $[0; 1]$.

На III Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» было предложено обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части и рассказано о сохранении информационного свойства свертки в неканонических случаях [3-4].

Благодаря центральной предельной теореме хорошо известно, что сумма независимых одинаково распределенных случайных величин при соответствующей нормировке сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине (однако свертка нормальной случайной величины с произвольной, вообще говоря, не является нормальной).

Возникает естественный вопрос о сходимости дробной части свертки одинаково распределенных случайных величин к равномерному распределению. Пока получен ответ в следующих частных случаях.

Утверждение 1.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots$ суть независимые одинаково распределённые бернулевские величины.

Тогда $\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\}_2$ сходится при $n \to \infty$ к равномерному распределению.

Утверждение 2.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots$ суть независимые одинаково распределённые величины имеющие следующее распределение:

$$\xi_k \sim \quad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1-a}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+a}{3} \end{array}$$

Тогда $\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\}_2$ стремится к равномерному распределению на $\{0, 1, 2\}$ при $n \to \infty$. А также были доказаны все остальные случаи с другим положением одного параметра.

Утверждение 3.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots$ суть независимые случайные величины с плотностью:

$$p(x) = \begin{cases} 2a \cdot x + (1-a) & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Тогда $\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n\}$ сходится к равномерному распределению на [0,1] при $n \to \infty$.

Источники и литература

1) Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Об информационном свойстве свертки с равномерным распределением // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XIV Международной конференции (г. Махачкала, 16–19 сентября 2021 г.). — Махачкала, издательство ДГУ. – 2021. – С. 135–138
2) Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки – 2022. – № 1. – С. 7–11.
3) Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. О сохранении информационного свойства свертки в неканоническом случае // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы III Всероссийской конференции (г. Махачкала, 7-9 февраля 2022 г.). – Махачкала, издательство ДГУ. – 2022 – С. 105–108.
4) Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2022. – № 1. – С. 45–52.