Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Об асимптотических оценках в задаче о разбиении множеств на части меньшего диаметра

Конарева Полина Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и случайных процессов, Москва, Россия
E-mail: konareva.ps@gmail.com

Проблема Борсука является одной из фундаментальных проблем комбинаторной геометрии. Рассмотрим произвольное ограниченное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности будем считать, что диаметр множества равен 1.

Числом Борсука произвольного ограниченного множества Ω назвается

$$f(\Omega) = \min\{f : \Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_f, \forall i \text{ diam } \Omega_i < \text{diam } \Omega = 1\}.$$

Далее, пусть

$$f(n) = \max_{\Omega} f(\Omega).$$

Проблема Борсука заключается в том, чтобы найти $f(n)$ - минимальное количество частей строго меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$.

Эта работа посвящена одному важному варианту классической проблемы Борсука. Пусть $b \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Определим величину $\chi(n,b)$ как минимальное количество частей диаметра сторого меньше b, на которые может быть разбито произвольное ограниченное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ясно, что при $b = 1$ мы получим в точности число Борсука. Нас будет интересовать случай, когда $n \to \infty$, $b = b(n)$. Важным результатом является доказательство следующей теоремы [1] при помощи линейно-алгебраического метода. В докладе будет показано, что если $b(n) \leq c < 1$ для любого n и некоторой константы c, то нижние оценки числа $\chi(n,b)$ будут экспоненциальны по n. Будут представлены полученные константы под знаком экспоненты, в зависимости от различных значений $b(n)$.

Теорема. *Пусть $k_{-1} = k_{-1}(n)$, $k_0 = k_0(n)$, $k_1 = k_1(n)$ — произвольные функции со значениями во множестве $\mathcal{R}_n$, удовлетворяющие соотношениям*

$$k_{-1}(n) + k_0(n) + k_1(n) = n, \quad k_{-1}(n) + k_1(n) \leq \frac{n}{2}, \quad k_{-1}(n) \leq k_1(n).$$

Рассмотрим для каждого n максимальное целое число $a = a(n)$, с которым

$$\sqrt{\frac{k_1(n) + k_{-1}(n) - a(n)}{k_1(n) + 3k_{-1}(n)}} \geq b(n).$$

Пусть $f(n, k_{-1}, k_0, k_1, s)$ — максимальная мощность совокупности $(-1,0,1)$-векторов в $\mathbb{R}^n$, в которой каждый вектор имеет ровно k_i, $i \in \{-1,0,1\}$, координат величины i и в которой скалярное произведение любых двух векторов не меньше s. Тогда

$$\chi(n, b(n)) \geq \frac{C_n^{k_1(n)} C_{n-k_1(n)}^{k_{-1}(n)}}{f(n, k_{-1}(n), k_0(n), k_1(n), a(n)+1)}.$$

Утверждение. *Пусть $k_1(n) = [k_1' n]$, $k_{-1}(n) = [k_{-1}' n]$ и, как и ранее, $k_{-1}' + k_1' \leq\ 1/2$, $k_i' > 0$, $k_{-1}' \leq k_1'$. Тогда*

$$\chi(n, b(n)) \geq \left(\frac{A^A B^B C^C}{(k_1')^{k_1'} (k_{-1}')^{k_{-1}'} (1 - k_1' - k_{-1}')^{1 - k_1' - k_{-1}'}} + o(1) \right)^n,$$

где

$$A = \frac{2 + 6b^2(3k_{-1}' + k_1') - \sqrt{-12b^4(3k_{-1}' + k_1')^2 + 24b^2(3k_{-1}' + k_1') + 4}}{12},$$

$$B = b^2(3k_{-1}' + k_1') - 2A, \quad C = 1 + A - b^2(3k_{-1}' + k_1').$$

Источники и литература

1) Райгородский А. М. О разбиении множеств на части меньшего диаметра // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2020. – Т. 495, № 1. – С. 74-77.