

**Стратегия оптимального роста в многоагентной модели рынка с афинными выплатами**

**Токаева Александра Александровна**

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

*E-mail: galynka@yandex.com*

Рассмотрим стохастическую модель финансового рынка с дискретным временем, в которой присутствуют  $M \geq 2$  агентов (инвесторов) и  $N \geq 2$  активов, каждый из которых выплачивает дивиденды в дискретные моменты времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Размеры выплат задаются формулой

$$P_t^n(\omega) = X_t^n(\omega) \sum_{m=1}^M \lambda_{t-1}^{m,n}(\omega) W_{t-1}^m(\omega) + Y_t^n(\omega), \quad (1)$$

где  $X^n = (X_t^n)_{t=1}^\infty$  и  $Y^n = (Y_t^n)_{t=1}^\infty$  есть некоторые заданные внешним образом согласованные с фильтрацией неотрицательные случайные последовательности,  $W_{t-1}^m(\omega)$  есть капитал  $m$ -го агента, а  $\lambda_{t-1}^{m,n}(\omega)$  есть стратегия  $m$ -го агента.

Стратегия  $m$ -го агента — это измеримая относительно  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$  последовательность  $\Lambda^m = (\Lambda_t^m)_{t=0}^\infty$  векторзначных функций  $\Lambda_t^m = \Lambda_t^m(\omega, c)$  со значениями в стандартном  $N$ -симплексе  $\Delta_N = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^N : \lambda^1 + \dots + \lambda^N = 1\}$ . Для  $n = 1, \dots, N$ ,  $n$ -я координата  $\Lambda_t^{m,n}$  обозначает долю капитала, которую  $m$ -й агент вложил в  $n$ -й актив в момент времени  $t$ .

Задача состоит в нахождении стратегии, которой должен следовать индивидуальный инвестор, если он хочет быть не вытесненным с рынка на бесконечном горизонте времени. Такие стратегии будем называть "выживающими". В частности, "выживающими" являются стратегии оптимального относительного роста.

**Определение 1.** Стратегия  $\hat{\Lambda}$  называется "выживающей", если для любого профиля стратегий  $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^M)$  с  $\Lambda^1 = \hat{\Lambda}$  и любого вектора начальных капиталов  $W_0 = (W_0^1, \dots, W_0^M)$  с  $W_0^1 > 0$  выполнено, что  $\inf_{t \geq 0} W_t^1 > 0$  п.н.

**Определение 2.** Стратегия  $\hat{\Lambda}$  называется стратегией оптимального относительного роста, если для любого профиля стратегий  $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^M)$  с  $\Lambda^1 = \hat{\Lambda}$  и любого вектора начальных капиталов  $W_0 = (W_0^1, \dots, W_0^M)$  с  $W_0^1 > 0$  выполнено, что  $\ln r_t^1$  является субмартингалом.

**Лемма 1.** Для любого  $t \geq 0$ , рассмотрим  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\Delta_N)$ -измеримую функцию  $L_t: \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \Delta_N \rightarrow \Delta_N$ , у которой  $n$ -я координата определена по формуле

$$L_t^n(\omega, c, \lambda) = E_t \left( \frac{c \lambda^n X_{t+1}^n + Y_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N (c \lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)} \right).$$

Тогда существует  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -измеримая функция  $\hat{\Lambda}_t(\omega, c)$  со значениями в  $\Delta_N$ , такая что

$$L_t(\omega, c, \hat{\Lambda}_t(\omega, c)) = \hat{\Lambda}_t(\omega, c) \text{ для всех } (\omega, c). \quad (2)$$

**Теорема 1.** Стратегия  $\hat{\Lambda}$ , определенная по формуле (2), является стратегией оптимального относительного роста.

### Источники и литература

- 1) Drokin, Y. and Zhitlukhin, M. (2020) *Relative growth optimal strategies in an asset market game*.
- 2) Amir R., Evstigneev I., Schenk-Hoppé, K., *Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games*, *Annals of Finance*, 9 (2013), 121–144.
- 3) Bharucha-Reid A. T. *Fixed point theorems in probabilistic analysis*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82 (1976), 641–657.
- 4) Aliprantis C. D. Border K. C. *Infinite Dimensional Analysis*, Springer, Ch.18, 591–600.