Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Оценка вероятности разорения страховщика и перестраховщика в модели риска с квотным перестрахованием

Научный руководитель – Булинская Екатерина Вадимовна

Шатохин Алексей Александрович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: shatohin.leha79192212123@yandex.ru

В работе рассматривается модель с дискретным временем для капитала страховщика и перестраховщика в случае квотного перестрахования. Пусть $\alpha \in [0,1]$ - квота, U_n и V_n - капиталы страховщика и перестраховщика в момент n, u и v - их начальные капиталы, соответственно. Тогда U_n и V_n имеют вид

$$U_n = u + \alpha \sum_{i=1}^{n} Y_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$V_n = v + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} Y_i - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где X_n - выплаты по страховке за n-й период времени, $X = \{X_n\}_{n>0}$ - последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин;

Y_n - премии, полученные за n-й период времени, $Y = \{Y_n\}_{n>0}$ - последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, независимая с X.

Вероятность разорения за n периодов страховщика с начальным капиталом u, которую обозначим через $\psi_n^{(1)}(u,\alpha)$, определяется как

$$\psi_n^{(1)}(u,\alpha) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (U_k \leq 0)\right).$$

Аналогично, $\psi_n^{(2)}(v,\alpha)$ - вероятность разорения за n периодов перестраховщика с начальным капиталом v; она определяется как

$$\psi_n^{(2)}(v,\alpha) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (V_k \leq 0)\right).$$

Определим также вероятность того, что хотя бы одна из сторон - страховщик или перестраховщик - разорится до момента n:

$$\psi_n(u,v,\alpha) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} [(U_k \leq 0) \cup (V_k \leq 0)]\right).$$

В работе B.K. Dam, N.Q. Chung [1] были получены верхние оценки для исследуемых вероятностей разорения.

В данной работе получены нижние оценки для искомых вероятностей. Значит, при некоторых допущениях можно вычислить, в каких границах лежат вероятности разорения, о чем и говорит следующая теорема:

Теорема. *Предположим, что процессы* X *и* Y *удовлетворяют следующим условиям*: $\sup(X_1) < +\infty, \sup(Y_1) < +\infty, \mathbb{E}(Y_1) > \mathbb{E}(X_1)$ *и* $\mathbb{P}(X_1 - Y_1 > 0) > 0$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0,1)$

$$\beta e^{-u\widehat{R}_\alpha} \le \psi_n^{(1)}(u,\alpha) \le \gamma e^{-u\widehat{R}_\alpha},$$

$$\beta e^{-v\widetilde{R}_\alpha} \le \psi_n^{(2)}(v,\alpha) \le \gamma e^{-v\widetilde{R}_\alpha},$$

где

$$\beta = \frac{\inf_{z\ge 0} e^{R_0 z}\overline{H}(z)}{\mathbb{E}\left(e^{R_0 X_1}\right)},$$

$$\gamma^{-1} = \inf_{z\ge 0} \frac{\int_z^\infty e^{R_0 x} dH(x)}{e^{R_0 z}\overline{H}(z)},$$

R_0 - *единственный положительный корень уравнения* $\mathbb{E}\left(e^{R(X_1-Y_1)}\right) = 1$;
$\widehat{R}_\alpha = \frac{R_0}{\alpha}$, $\widetilde{R}_\alpha = \frac{R_0}{1-\alpha}$, $H(x)$ - *функция распределения* X_n, $n = 1, 2, \ldots$,
$\overline{H}(x) = 1 - H(x)$.

Значит, в силу формулы вероятности объединения событий

$$\max(\beta e^{-u\widehat{R}_\alpha}, \beta e^{-v\widetilde{R}_\alpha}) \le \psi_n(u,v,\alpha) \le \gamma(e^{-u\widehat{R}_\alpha} + e^{-v\widetilde{R}_\alpha}).$$

Источники и литература

1) B.K. Dam, N.Q. Chung. On Finite-Time Ruin Probabilities in a Risk Model Under Quota Share Reinsurance. Applied Mathematical Sciences, 2017, Vol. 11, no. 53, 2609 - 2629.