Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Системы Штейнера, коды, евклидовы решётки и их связь с накрытием группы Матье $M_2 2$

Научный руководитель – Чубаров Игорь Андреевич

Мартиросов Артём Каренович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: ar.martirosov2011@yandex.ru

lomonosov

Системы Штейнера, коды, евклидовы решётки и их связь с накрытием группы Матье M22Мартиросов А. К.

Мартиросов Артём КареновичСтудентФакультет мехмат МГУ имени М. В. ЛомоносоваМоск
древич

Одной из главных характеристик группы является её мультипликатор Шура — вторая группа когомологий при тривиальном действии на мультипликативной группе поля $\mathbb{C}$. Если группа G совпадает со своим коммутантом (в частности, если она простая неабелева), то найдётся единственная группа $\tilde{G}$, для которой выполнены условия:

1) найдётся подгруппа $Z \leqslant Z(\tilde{G})$ такая, что $\tilde{G}/Z \cong G$;
2) $\tilde{G}' = \tilde{G}$;
3) любая группа H с условиями 1–2 изоморфна факторгруппе $\tilde{G}$.

Если G конечна, то и $\tilde{G}$ конечна. Эта группа $\tilde{G}$ называется *универсальным накрытием* или *группой представления* группы G, а подгруппа Z (также определённая однозначно, с точностью до изоморфизма) называется *мультипликатором Шура* группы G. Любая группа H с условиями 1–2 называется *накрытием* группы G.

Среди всех 26 конечных спорадических простых групп наибольший мультипликатор Шура имеет группа Матье M_{22} — имеет место теорема ([2]):

Теорема 1. *Мультипликатор Шура группы M_{22} является циклической группой порядка* 12.

Сама группа M_{22} имеет порядок $|M_{22}| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 443\,520$.

В данной работе исследуется один из возможных подходов к построению четверного накрытия $4.M_{22}$ группы M_{22} (то есть с циклической подгруппой Z порядка 4). Её тройное накрытие можно построить, например, вложив её в группу $\mathrm{U}_6(2)$ и расширив её до группы $\mathrm{SU}_6(2) = 3.\mathrm{U}_6(2)$ ([1], с. 169). В четвёртой группе Янко J_4 содержится подгруппа $6.M_{22}$, которая после факторизации по центральной подгруппе порядка 2 также даёт тройное накрытие M_{22} ([1], с. 169).

Основной инструмент в данной работе — некоторая евклидова решётка в $\mathbb{C}^{10}$. Её построение основывается на геометрии системы Штейнера $S(3,4,10)$ (единственной, с точностью до изоморфизма) и двух порождаемых ею двоичных $[10,5,4]$-кодах.

Определение 1. Системой Штейнера $S(t,k,v)$ называется пара $(\Omega, \mathcal{B})$, где Ω — множество порядка v, $\mathcal{B}$ — набор подмножеств Ω порядка k, называемых блоками, причём выполнено условие: каждое подмножество Ω порядка t содержится в единственном блоке из $\mathcal{B}$.

Определение 2. $[n, k, d]$-кодом над конечным полем $\mathbb{F}_q$ порядка q называется k-мерное подпространство в n-мерном пространстве строк над $\mathbb{F}_q$, в котором каждый ненулевой вектор имеет не менее d ненулевых координат, причём некоторый вектор имеет ровно d ненулевых координат.

Систему $S(3, 4, 10)$ проще всего построить, взяв в качестве Ω множество из десяти силовских 3-подгрупп группы S_6, а в качестве блоков — четвёрки силовских 3-подгрупп, нормализуемых нечётными инволюциями в S_6. Тридцать блоков этой системы можно естественным образом разбить на два класса по 15 блоков — это четвёрки силовских 3-подгрупп, нормализуемые транспозициями или тройными транспозициями. Если рассматривать подмножества Ω как двоичные наборы длины 10, то блоки каждого класса будут порождать 5-мерное подпространство в пространстве всех строк ($[10, 5, 4]$-код), причём полученные два подпространства являются ортогональными дополнениями друг к другу.

На основе этих кодов строится решётка $L \leqslant (\mathbb{Z}[\zeta])^{10}$, где $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, группой автоморфизмов которой является группа $2.M_{22}.2$. Она естественным образом действует на факторрешётке решётки L, которое можно отождествить с 10-мерным векторным пространством V над полем $\mathbb{F}_7$. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^{10}$ при этом превращается в невырожденную симметрическую билинейную форму на V типа , что даёт вложения $2.M_{22}.2 \hookrightarrow \mathrm{O}_{10}^{-}(7)$, $2.M_{22} \hookrightarrow \Omega_{10}^{-}(7)$. Расширяя $\Omega_{10}^{-}(7)$ до спинорной группы $2.\Omega_{10}^{-}(7)$, получаем искомое четверное накрытие $4.M_{22}$.

Wilson R. A. The Finite Simple Groups. Springer, 2007

ATLAS of Finite Groups:
https://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/