Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Число примитивных элементов свободных неассоциативных алгебр над конечными полями

Научный руководитель – Михалёв Александр Александрович

Майсурадзе Михаил Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: goldywhite@gmail.com

Неассоциативные свободные алгебры относятся к шрайерову многообразию алгебр. Аналогичную теореме Нильсена-Шрайера в 1947 году доказал А. Г. Курош для неассоциативных свободных алгебр: всякая подалгебра неассоциативной свободной алгебры с любым множеством свободных образующих, отличная от нуля, является свободной [n1].

Неассоциативной свободной алгеброй A над полем K с системой свободных образующих X называется алгебра над K, базой которой служит множество всевозможных слов относительно символов из X. Всякий элемент свободной алгебры, отличный от нуля, однозначно представим в види суммы конечного числа различных слов, взятых с отличными от нуля коэффициентами из поля K.

Система элементов свободной алгебры называется примитивной, если её можно дополнить до множества свободных образующих этой алгебры. Сами элементы такой системы называются примитивными элементами.

В начале 2000-х был получен критерий примитивности системы и отдельного элемента [n2]:

Система $a_1, a_2, \ldots, a_r$ элементов свободной неассоциативной алгебры A примитивна тогда и только тогда, когда матрица $(\partial(a_1), \ldots, \partial(a_r))$ обратима слева над $U(A)$. В частности, элемент $a \in A$ является примитивным тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $m_1, \ldots, m_n \in U(A)$, что $\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1$.

Здесь, $U(A)$ – универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра, являющаяся свободной ассоциативной алгеброй с образующими – операторами левого и правого умножения на мономы A.

Слова свободной алгебры с n образующими можно разбить на группы по длине слова и расстановке скобок. В каждой группе слов длины k будет n^k элементов, которые можно записать в виде k-мерной таблицы. Коэффициенты при этих мономах также удобно записывать в виде k-мерной таблицы.

При дифференцировании мономов длины k одной группы получается k различных групп мономов универсальной мультпликативной обёртывающей алгебры. Коэффициенты при этих мономах получаются из исходной k-мерной таблицы её транспонированиями.

Это наблюдение позволило сформулировать и доказать критерий примитивности элементов длины 2 в терминах линейной алгебры:

Элемент $h = a \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{x} \otimes \bar{x}$, примитивен тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\left(a \mid B \mid B^T\right)$ больше ранга матрицы $\left(B \mid B^T\right)$.

Для элементов длины больше 2 аналогично формулируется признак примитивности, с помощью которого удалось получить оценку числа примитивных элементов с 2 образующими:

$$S_2^k(q) \geqslant q(q-1)(q+1)q^{\sum\limits_{i=2}^{k-1} C_{i-1}} \left(q^{C_{k-1}} - 1\right).$$

Источники и литература

1) А. Г. Курош. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр. Математический сборник 1947. Т. 20, С. 239–262.
2) A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, J.-T. Yu. Automorphic orbits of elements of free non-associative algebras. Journal of Algebra 243 (2001), 198–223.