

Математическое моделирование полевой эмиссии из катода малых размеров

Борисов Вячеслав Дмитриевич

Аспирант

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Москва, Россия

E-mail: vdborisov@hse.ru

1. Введение

Математическая модель, которая решается в задаче, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla(k \nabla \theta) - f = F, \nabla(\sigma \nabla \psi) = R, \quad (1)$$

(??) ; уравнение теплопроводности, (1) ; уравнение для потенциала. Из анализа эффекта Ноттингама [2], [4] следует условие

$$\left[\sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{n_{ext}} \Big|_L = R, \quad (2)$$

где L ; поверхность эмиссии, возникающее за счет барьера для излучаемых электронов. Основная задача: вычислить коэффициенты в правой части (2).

2. Правая часть уравнения для потенциала[1]

Используем обобщенное решение уравнения (1). V ; объем всей области, где решается задача. ϕ ; пробная функция, $\phi \in \infty (V)$. На границе области полагаем $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$. В данном исследовании прямоугольная область V состоит из двух подобластей: V_{ext} ; объем вне эмиттера, V_{int} ; объем внутри эмиттера. В каждой подобласти разрывный коэффициент σ принимает разные значения. Левая часть исходного выражения разделяется на два интеграла. Перепишем обобщенное решение с учетом этого, используем формулу Лейбница и формулу Остроградского ; Гаусса. Полагая $\phi = 0$ в V_{ext} и на границе и $\phi = 0$ в V_{int} и на границе. Тогда, с учетом разрывности коэффициента σ на $\partial V_{int} \cap \partial V_{ext} = \Gamma$, для любой функции $\phi \in \infty (V)$, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{V_{int}} (\nabla \phi, \sigma \nabla \psi) dV + \int_{V_{ext}} (\nabla \phi, \sigma \nabla \psi) dV &= \\ &= - \int_{\partial V_{int}} (\nabla \phi, \sigma_{int} \frac{\partial \psi}{\partial n_{int}}) d(\partial V) - \int_{\partial V_{ext}} (\nabla \phi, \sigma_{ext} \frac{\partial \psi}{\partial n_{ext}}) d(\partial V) = \\ &= \int_{\partial V_{int}} (\nabla \phi, \sigma_{int} \frac{\partial \psi}{\partial n_{ext}}) d(\partial V) - \int_{\partial V_{ext}} (\nabla \phi, \sigma_{ext} \frac{\partial \psi}{\partial n_{ext}}) d(\partial V) = \\ &= \int_{\Gamma} \phi (\sigma_{int} \frac{\partial \psi^-}{\partial n_{ext}} - \sigma_{ext} \frac{\partial \psi^+}{\partial n_{ext}}) \quad (3) \end{aligned}$$

Будем считать $\Gamma = \Gamma_S \cup L$, и

$$\left[k \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{n_{ext}} \Big|_{\Gamma_S} = 0, \quad (4)$$

где Γ_S — образующая поверхность конуса, L — верхняя граница-полусфера (поверхность эмиссии). Для границы L выполняется следующее равенство:

$$j_{ext} = D j_{int}, \quad (5)$$

где D — средний коэффициент прозрачности барьера. Так как катод находится в вакууме, σ_{ext} можно пренебречь и положить равным 0. Тогда

$$\sigma_{int} D \frac{\partial \psi}{\partial n_{ext}} \delta|_L = R_1, \quad (6)$$

$\delta|_L$ — дельта-функция. sectionМетоды Сформулируем вспомогательную задачу, для решения уравнения для потенциала (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \nabla(\sigma \nabla \psi) - j_{em} \delta|_L, \\ -0.5 \leq x_1 \leq 0.5, \quad 0 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения поставленной задачи будем использовать разностную шеститочечную схему, определенную на шаблоне равномерной прямоугольной сетки[3]. Явная схема, имеет аппроксимацию $O(h^2 + \tau)$ и сходится при $\tau \leq \frac{h^2}{2 \max(\sigma)}$.

3. Результаты вычислений

Для решения поставленной задачи была разработана программа на C++ Cuda[5]. При $H = 160h$, $r = 5h$, ϵ (расстояние между катодом и анодом) = $5h$, где h ; шаг сетки, $\sigma_{int} = 1000$, $\sigma_{ext} = 0.001$ и $U_0 = 4V$, приложенной к основанию были получены следующие результаты (рис.1-2):

Список литературы

- [1] Борисов В.Д. ВКР Аналитическое и численное исследование полевой эмиссии из катода в анод в вакууме// НИУ ВШЭ, 2021
- [2] Данилов В. Г., Руднев В. Ю., Гайдуков Р. К., Кретов В. И. Математическое моделирование эмиссии из катодов малых размеров // 2014. – 232с.
- [3] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. // НАУКА – 1971
- [4] Nottingham W. B. Remarks on Energy Losses Attending Thermionic Emission of Electrons from Metals // Physical Review. – 1941.
- [5] NVIDIA CUDA Toolkit <https://docs.nvidia.com/cuda/index.html> – 2022