Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Валидация поведения передатчика в канале частичного стирания

Казаков Илья Борисович
Сотрудник
Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва, Россия
E-mail: i_b_kazakov@mail.ru

Данный доклад посвящен алгоритму, который по формальному описанию поведения передатчика (традиционно называемого Алисой) в канале частичного стирания проверяет выполнение критериального условия существования согласованного с ним поведения приемника (традиционно называемого Бобом). Данные понятия, а также постановка задачи проверки указанного условия введены в работах автора [1–3].

Структура частичного стирания — это тройка, состоящая из алфавита A, семейства определённых на данном алфавите разбиений и набора вероятностей, приписанных разбиениям. Канал частичного стирания функционирует следующим образом. Алиса отправляет Бобу символ $a \in A$, а Боб получает только часть информации: какое было выбрано разбиение и какому классу выбранного разбиения принадлежал отправленный символ. Множество пар, состоящих из разбиения и класса по данному разбиению, т. е. множество возможных сигналов, которые может получить Боб, обозначается как алфавит Боба B.

Между отправляемыми Алисой и получаемыми Бобом символами естественным образом определено соответствие. Полагаем, что для символов $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $a \mapsto b$, если в структуре частичного стирания имеется разбиение T, такое, что $b = (\pi_T(a), T)$. Соответствие обобщается также и на слова. Полагаем, что выполнено $a_1 \dots a_n \mapsto b_1 \dots b_n$, если для всех $i = 1 \dots n$ выполнено $a_i \mapsto b_i$. Полагаем также, что у Алисы имеется входная лента, с которой она читает символы некоторого конечного алфавита S. У Боба, в свою очередь, имеется выходная лента, на которую он может печатать символы алфавита S, а также специально зарезервированный (не входящий в S) символ стирания . Общей целью как Алисы, так и Боба является отпечатывание на выходной ленте того же содержания, которое изначально имеется на входной, при этом, может быть, с заменой значащих символов на символ стирания . В работах [2], [3] рассмотрены формализованные схемы организации передачи информации от Алисы к Бобу, названные протоколами передачи информации в канале частичного стирания.

В соответствии с произведённой в [3] формализацией поведение Алисы может быть описано как функция $F : S^* \to A^*$, а поведение Боба — как функция $G : B^* \to S \cup \{*\}$, где A^*, B^*, S^* — множества слов, т. е. конечных последовательностей символов алфавитов A, B, S соответственно. Протокол — это пара функций (F, G). Функция F однозначно определяет детерминированную функцию $\hat{F}$ следующим образом: $\hat{F}(\hat{s}) = \hat{F}(s_1 \dots s_m) = F(\Lambda)F(s_1)F(s_1 s_2) \dots F(s_1 \dots s_m)$. Представим содержательную интерпретацию, относящуюся к функциям поведения F, G. Пусть Алиса только что прочитала с входной ленты очередной символ $s \in S$, предварительно уже считав слово $\hat{s} = s_1 \dots s_m$. Тогда считаем, что на протяжении последующих $|F(\hat{s}s)|$ тактов Алиса посимвольно отправляет по каналу частичного стирания слово $F(\hat{s}s)$. Что касается Боба, то на каждом такте он получает некий символ $b \in B$. Получив указанный символ, он должен принять решение о том, что печатать на выходной ленте: или какой-нибудь символ из $S \cup \{*\}$, или ничего не печатать. Полагаем, что если $G(\beta) \in S \cup \{*\}$, то Боб печатает символ $G(\beta)$. Иначе, т. е. если $G(\beta) = \Lambda$, то Боб ничего не печатает.

В соответствии с общей целью Алисы и Боба в работе [3] введено понятие корректного протокола. Основным является вопрос о том, для каких именно функций поведения

Алисы F существует функция поведения Боба G, такая, что пара (F, G) является корректным протоколом. Ответом является теорема, что для этого необходимо и достаточно, чтобы F принадлежала к классу правильных функций. Доказательство теоремы представлено в статье [3]. Очевидно, представляет интерес решение задачи проверки произвольной функции $F : S^* \to A^*$ на принадлежность к классу правильных. Функция F называется правильной, если из выполнения условий $\hat{F}(\hat{s}_1) \mapsto \beta_1$, $\hat{F}(\hat{s}_2) \mapsto \beta_2$ и β_1 — префикс β_2 следует выполнение условия $|\hat{s}_1| \leq |\hat{s}_2|$. Настоящий доклад посвящен данному алгоритму и оценке его сложности.

Функция $\hat{F}$ представима в виде (не обязательно конечного) автомата, у которого S является входным алфавитом, а множество слов A^* — выходным: автомат на каждом шаге принимает символ $s \in S$ и выдаёт слово $\alpha \in A^*$.

Входными данными алгоритма считаются функции переходов и выходов описанного автомата. Алгоритм принимает входные данные и за конечное время выдаёт ответ вида «да/нет» о принадлежности функции поведения Алисы F к классу правильных. Поскольку за конечное время алгоритм не может обработать бесконечный объём входных данных, то имеет смысл рассматривать только ограниченно-детерминированные функции, т. е. такие, автомат которых имеет конечное число состояний.

Представляемый в настоящем докладе алгоритм оперирует с так называемыми «перебираемыми сущностями». Перебираемая сущность — это пятёрка $(q_1, q_2, \alpha, \hat{s}_1, \hat{s}_2)$, где $q_1, q_2 \in Q$; $\alpha \in A^*$; $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in S^*$. Будем также говорить, что перебираемые сущности $(q_1, q_2, \alpha, \hat{s}_1, \hat{s}_2)$ и $(q'_1, q'_2, \alpha', \hat{s}'_1, \hat{s}'_2)$ подобны, если $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$ и $\alpha = \alpha'$.

Кроме входных данных, алгоритм хранит в памяти, во-первых, очередь перебираемых сущностей, которые предстоит обработать алгоритму. Во-вторых, в памяти хранится также множество перебираемых сущностей, которое далее называется множеством «принятых к обработке». Тот факт, что конкретная перебираемая сущность в некоторый момент находится в указанном множестве означает, что к данному моменту алгоритм уже добавлял в очередь подобную ей перебираемую сущность.

Формально для алгоритма имеются три возможности: или он остановится в состоянии пустой очереди (что означает ответ «да»), или выдаст исключение (что означает ответ «нет»), или будет работать бесконечно долго. Представляющий функцию F автомат имеет $|S|$ входных символов и $|Q|$ внутренних состояний. Значениями выходной функции являются слова из A^*. Обозначим максимальную длину слова из множества значений выходной функции через L.

Теорема 1. *Возможность бесконечно долгой работы алгоритма исключена. Если F — правильная функция, то алгоритм остановится в состоянии пустой очереди, иначе он выдаст исключение. Сложность алгоритма составляет $O(L|Q|^3|S|^4)$.*

Источники и литература

1) Казаков И. Б. Передача информации в каналах, задаваемых структурами частичного стирания. Ч. 1 Программная инженерия. 2020. Т. 11. № 5. С. 277–284.

2) Казаков И. Б. Передача информации в каналах, задаваемых структурами частичного стирания. Ч. 2 Программная инженерия. 2020. Т. 11. № 6. С. 322–329.

3) Казаков И. Б. Критерий существования корректного протокола в канале частичного стирания Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 1. С. 133–151.