

О предикатном задании минимальных клонов трехзначной логики

*Зданович Артем Иванович**Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
 Механико-математический факультет, Кафедра математической теории
 интеллектуальных систем, Москва, Россия
E-mail: artsemzdanovich@mail.ru

В данной работе исследуется предикатная описуемость отдельных минимальных клонов функций трехзначной логики. Замкнутые классы функций k -значной логики образуют решетку. В случае $k = 2$ их количество счетно и Э.Пост полностью описал все замкнутые классы функций двухзначной логики в [1], [2], однако при $k \geq 3$ их количество становится уже континуальным. Отдельный интерес представляет изучение "крайних" элементов этой решетки: верхней частью решетки являются предполные классы, нижней – минимальные клоны. В то время как предполные достаточно хорошо изучены и получены существенные результаты в [5], минимальные клоны нуждаются в дальнейших исследованиях. В частности, открытой проблемой является предикатная описуемость минимальных клонов.

Из работы Э.Поста [2] следует, что в двухзначной логике существуют 7 минимальных клонов и они предикатноописуемы. Кроме того, существует предикатное построение решетки Поста, описанное в работе Д.Н.Жука [3]. Известно, что минимальных клонов в трехзначной логике 84 и они описаны Vela Csakany [4]. Для логик больших значностей существует лишь неполная классификация, а именно разбиение на пять конечных семейств, как показал И. Розенберг в [6]. Также был установлен критерий предикатной описуемости замкнутого класса C . В. Яблонским в [7].

В дипломной работе Ольги Глюз [8] установлена предикатная описуемость минимального клона, порожденного унарной функцией, а также минимального клона, порожденной бинарной идемпотентной коммутативной ассоциативной функцией для логики любой значности. Также из работы [9] Д.Н.Жука следует, что минимальный клон, порожденный самодвойственным полуселектором предикатно описуем. Из описанного выше следует, что для одного семейства И.Розенберга полностью установлена предикатная описуемость, для оставшихся этот вопрос остается открытым и в нем получены лишь частичные продвижения.

В работе автора делается очередной шаг на пути решения этой проблемы: устанавливается предикатная описуемость новых 2 минимальных клонов второго семейства в трехзначной логике – минимальных клонов, порожденных бинарной идемпотентной функцией

$$b_7(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \vee (x = 2 \wedge y = 0) \\ 1 & x = 1 \vee (x = 2 \wedge y = 1) \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases} \text{ и } b_8(x, y) = \begin{cases} x & (x = 0 \wedge y \neq 2) \vee (x = 2 \wedge y \neq 0) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Также в работе непосредственно предъявляются предикаты, задающие эти клоны. Кроме того, автору удалось установить предикатную описуемость некоторых новых свойств замкнутых классов, которые могут оказаться полезными для построения предикатов описывающих оставшиеся неизученные клоны.

Источники и литература

- 1) Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. Volume 43, № 4. P. 163-165.

- 2) Post E. L. Two valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1951. V. 5.
- 3) Жук Д. Н., “Предикатный метод построения решетки Поста”, Дискрет. матем., 23:2 (2011), 115–128
- 4) B. Csakany, All minimal clones on the three-element set, Acta Cybernet. 6 (1983), no. 3, 227–238
- 5) Lau D. Function Algebras on Finite Sets 2006
- 6) I. G. Rosenberg, Minimal clones I: the five types, Lectures in universal algebra. Colloq. Math. Soc. J Bolyai, 43, North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 405-427.
- 7) Яблонский С. В. О строении верхней окрестности для предикатно описуемых классов в P_k // Доклады АН СССР. 1974. Т. 218, № 2. С. 304-307.
- 8) Глюз О. А. «О нижней части решётки замкнутых классов функций k -значной логики». Дипломная работа. Москва 2014.
- 9) Жук Д. Н. Решетка замкнутых классов самодвойственных функций трехзначной логики. М.: Изд-во МГУ, 2011.