Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О якобиане и сложности Δ-графа

Научный руководитель – Тетенов Андрей Викторович

Юдин Иван Николаевич

Аспирант

Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: uivan566@gmail.com

Пусть G - конечный связный граф. Понятие сложности для графа возникает по-разному. Например, он может варьироваться от простых параметров, таких как количество ребер или вершин, до количества порождающих деревьев или корневых порождающих лесов графа. Все вышеупомянутые инварианты могут быть найдены как функция собственных значений оператора Лапласа графа. Итак, они являются спектральными инвариантами.

Сложность графа играет важную роль в статистической физике, где рассматриваются графы с произвольно большим числом вершин [1].Группа Якобиана допускает естественную интерпретацию в различных областях физики, теории кодирования и финансовой математики. Мы упоминаем, что количество порождающих деревьев и количество порождающих корневых лесов для циркулянтных графов выражаются в терминах полиномов Чебышева [2]. В настоящей работе мы рассматриваем разложение графа циклов на 3 вершины, так называемый Δ-граф. Мы находим количество порождающих деревьев и корневых порождающих лесов и исследуем структуру якобиана.

Теорема 1. *Число порождающих деревьев в графе $\tau(n)$ в графе $\Delta(n; k, l, m)$ дается формулой*

$$\tau(n) = \frac{n}{k^2 + l^2 + m^2} \prod_{p=1}^{s-1} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где $s = k+l+m$, и w_p, $p = 1, 2, \ldots, s-1$ — все отличные от единицы корни алгебраического уравнения

$$Q(w) = -2 - A(w) - B(w) - C(w) + A(w)B(w)C(w) = 0.$$

При этом, $A(w) = 4 - 2T_k(w), B(w) = 4 - 2T_l(w), C(w) = 4 - 2T_m(w)$ и $T_j(w)$ — полином Чебышева j-го порядка первого рода.

Теорема 2. *Число корневых порождающих лесов в Δ-графе $\Delta(n; k, l, m)$ дается формулой*

$$f(n) = \prod_{p=1}^{s} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где w_p, $p = 1, 2, \ldots, s$ — все корни алгебраического уравнения $\widetilde{Q}(w) = 0$,

$$\widetilde{Q}(w) = \det \begin{pmatrix} K & -1 & -1 \\ -1 & L & -1 \\ -1 & -1 & M \end{pmatrix},$$

При этом, $K(w) = 5 - 2T_k(w), L(w) = 5 - 2T_l(w), M(w) = 5 - 2T_m(w)$ и $T_j(w)$ — полином Чебышева j-го порядка первого рода.

Источники и литература

1) F. Y. Wu, Number of spanning trees on a lattice, J. Phys. A: Math. Gen. 10, (1977), L113–115.
2) Zhang Yuanping, Yong Xuerong, M.J. Golin, The number of spanning trees in circulant graphs, Discrete. Math., 223 (2000), no.1, 337–350.