

**Реализация схем из функциональных элементов с задержкой нейронными сетями**

**Научный руководитель – Боков Григорий Владимирович**

**Дробышев Александр Сергеевич**

*Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра математической теории  
интеллектуальных систем, Москва, Россия

*E-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru*

Проблеме нейронных сетей сегодня уделяется большое внимание. В данной работе мы сосредоточимся на условиях, при которых возможна реализация схем из функциональных элементов нейронными сетями. Первая формальная математическая модель нейрона была представлена в 1943 году У. С. Мак-Каллоком и В. Питтсом [2], позднее в 1956 году С. К. Клини [3] показал, что каждый конечный автомат моделируется нейронной сетью с задержкой в два такта. В 2008 году С. В. Моисеев [1] сформулировал и доказал необходимые и достаточные условия, при которых это моделирование возможно.

Отображение  $f : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$  будем называть *пороговой функцией*, если существуют такие  $w_i, h \in \mathbb{Z}$ , что  $f(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow w_1 \cdot x_1 + \dots + w_n \cdot x_n \geq h$ .

Рассмотрим автоматные функции вида  $f : A^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$ , где  $A = \{0, 1\}^n$ ,  $n \geq 0$  и обозначим через  $[\cdot]$  их замыкание относительно операций суперпозиции и обратной связи.

*Нейроны* — это автоматные функции вида  $\mathfrak{Z}_c f$ , где  $f$  — пороговая функция и  $c \in \{0, 1\}$ . Множество всех нейронов обозначим через  $\mathbf{N}$ .

Назовём отношение  $R \subseteq \{0, 1\}^m \times \mathbb{N}$  *перестановочным* ( $s \in \mathbb{N}$ ), если для любых наборов  $\langle a_1^1, \dots, a_1^m \rangle, \dots, \langle a_s^1, \dots, a_s^m \rangle \in R$  и любых перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_m : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$  найдётся  $i \in \{1, \dots, s\}$  такое, что

$$\langle a_{\sigma_1(i)}^1, \dots, a_{\sigma_m(i)}^m \rangle \in R.$$

Назовём отношение  $P \subseteq U \times \{0, 1\}^m$  *свободнопороговым*, если соответствующее ему  $(m + 1)$  — местное отношение

$$R_p = \{ \langle u, a^1, \dots, a^m \rangle \mid \langle u, \langle a^1, \dots, a^m \rangle \rangle \in P \}$$

$s$  - перестановочно  $\forall s \in \mathbb{N}$

Автоматные функции вида  $\mathfrak{Z}_0 f$ , где  $f$  — булева функция, будем называть *функциональными элементами с задержкой*.

*Схемой из функциональных элементов с задержкой* (с.ф.э.з) будем называть всякую систему уравнений  $F$  вида

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathfrak{Z}_0 f_1(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m), \\ &\dots \\ y_n &= \mathfrak{Z}_0 f_n(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

И будем обозначать её  $F \langle f_1, \dots, f_n; x_1, \dots, x_m \rangle$ .

Пусть  $F \langle f_1, \dots, f_n; x_1, \dots, x_m \rangle$  — с.ф.э.з. и

$$R_i = \{((b_1, \dots, b_n), (a_1, \dots, a_m)) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^m \mid f_i(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_m) = 1\}.$$

Назовём  $F$  согласованной, если  $R_i$  — свободнопороговое отношение на  $\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^m$  для всех  $1 \leq i \leq n$ .

Нейронной сетью будем называть с.ф.э.з., в которой каждая из функций  $f_1, \dots, f_n$  пороговая.

Задачей было определение условий, при которых с.ф.э.з. может быть реализована нейронной сетью. Для этого было сформулировано формальное определение реализуемости одной схемы при помощи другой.

Решением схемы  $F$  назовём такой набор  $(h_1, \dots, h_n)$  автоматных функций  $h_i: (\{0, 1\}^m)^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$ , что

$$h_i(\alpha) = \exists_0 f_i(h_1(\alpha), \dots, h_n(\alpha), a_1, \dots, a_m)$$

для всех  $1 \leq i \leq n$  и  $\alpha = (a_1, \dots, a_m) \in \{0, 1\}^m$ .

Будем говорить, что с.ф.э.з.  $G(g_1, \dots, g_k; x_1, \dots, x_m)$  реализует  $F$ , если существует такое отображение  $\sigma: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^k$ , что для решения  $(h_1, \dots, h_k)$  схемы  $G$  набор  $(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n)})$  является решением схемы  $F$ .

В результате была сформулирована следующая теорема:

**Теорема 1.** *Согласованные с.ф.э.з. и только они реализуются нейронными сетями.*

### Источники и литература

- 1) *Моисеев С. В.* О реализации автоматов нейронными сетями // Интеллектуальные системы, т. 12 (1–4), 2008, pp. 283–316.
- 2) *McCulloch W. S., Pitts W.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bull. Math. Biophys, vol. 5, 1943, pp. 115–133.
- 3) *Kleene S. C.* Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata // Automata Studies. Princeton University Press, 1956, pp. 3–42.