

Аппроксимация Паде ядра свертки решения волнового уравнения в канале с помощью нейронной сети для построения прозрачных граничных условий.

Родионов Данила Олегович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра вычислительной механики, Москва,
Россия

E-mail: danila2012r@yandex.ru

В работе представлены результаты применения нейронных сетей для получения аппроксимации типа Паде для ядра свертки решения волнового уравнения в канале с целью построения прозрачных граничных условий. Численная аппроксимация получена с помощью API Keras - библиотеки для разработки архитектур нейронных сетей с методом обучения, основанном на алгоритме градиентного спуска. Оценка эффективности алгоритма проводится на основе метода `scipy.Pade` языка программирования Python. Этот алгоритм предназначен для построения аппроксимации Паде с использованием входных данных в виде вектора коэффициентов разложения функции в ряд Тейлора в окрестности нуля посредством решения системы линейных уравнений.

Среди большого количества методов построения искусственных граничных условий на открытых границах особое место занимают так называемые прозрачные граничные условия (ПГУ), основанные на преобразовании Лапласа по времени и аппроксимация ядра свертки полученного точного граничного условия суммой экспонент. В пространстве изображений преобразования Лапласа ей соответствует сумма полюсов, которая после простейших алгебраических преобразований обращается в рациональную функцию. Одним из алгоритмов подбора коэффициентов в данной задаче может быть решение системы линейных уравнений, однако по ряду причин этот метод не всегда является оптимальным. Альтернативой является создание архитектуры нейронной сети, реализующей заданную функцию, суть обучения которой - поиск параметров для минимизации некоторого функционала. В общем случае для архитектур с заданным классом функций существование такого решения гарантируется теоремой Цыбенко. Таким образом для заданной сетки и известных значений ядра численная аппроксимация может быть получена в явном виде, что является очевидным преимуществом перед стандартным алгоритмом, основанном на разложении данной функции в ряд.

В процессе исследования были проанализированы результаты решения в зависимости от порядка многочлена знаменателя, сложности архитектуры, начальных распределений весов, количества итераций обучения. Для одинаковых порядков знаменателей было также проведено сравнение с библиотечным методом `scipy.Pade`, в ходе которого было выяснено, что уже для $n=5$ точность, демонстрируемая нейронной сетью, превосходит вышеуказанный метод более чем в два раза.

Таким образом, применение нейронной сети позволило получить решение с высокой степенью точности, превосходящей уже существующий алгоритм. В дальнейшем планируется провести анализ оптимальной глубины сети и сравнить результаты с другими существующими алгоритмами.

Источники и литература

- 1) Н. А. Зайцев. Прозрачные граничные условия для волнового уравнения в канале кругового сечения. УДК 519.651, 519.633.6
- 2) Stella Rose Biderman. Neural Networks on groups. arXiv:1907.03742[cs.NE]
- 3) Cybenko, G. V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function // Mathematics of Control Signals and Systems. — 1989. — Т. 2, № 4. — С. 303—314.
- 4) Chen, Chen. Approximations of Continuous Functionals by NN with Application to Dynamic Systems // IEEE Transactions on Neural Networks – 1993. DOI 10.1109/72.286886
- 5) S. Haykin Neural networks and machine learning // Library of Congress Cataloging-in-Publication Data