Секция «Прикладная механика и управление»

Задача Цермело при наличии переменной скорости

Тюрин Ростислав Русланович
Студент (магистр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет космических исследований, Москва, Россия
E-mail: trr1945@gmail.com

Научный руководитель — Черкасов Олег Юрьевич

В докладе рассматривается расширенная задача Цермело [1] при наличии переменной скорости [2]. Рассматривается линейный случай функции распределения поля скоростей, а также линейная зависимость ускорения от скорости.

Рассмотрим воздушное пространство в горизонтальной плоскости, в котором функциональным образом распределен поток воздуха. Введем декартовую систему координат $O\mathrm{xy}$. В этом поле скоростей находится корабль (в данной задаче он будет представлен материальной точкой) с переменным по модулю вектором скорости v. Направление вектора относительной скорости будем обозначать углом θ (относительно горизонтальной оси), $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Уравнения движения корабля имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = v\cos\theta + W\left(\mathrm{x}, \mathrm{y}\right), \\ \dot{\mathrm{y}} = v\sin\theta + U\left(\mathrm{x}, \mathrm{y}\right), \\ \dot{v} = -kv - \frac{1}{2}av\sin 2\theta. \end{cases} \tag{1}$$

Начальные условия

$$x\left(0\right) = 0, \quad y\left(0\right) = 0, \quad v\left(0\right) = 1. \tag{2}$$

В момент окончания процесса значения $x(T), y(T)$ и $v(T)$ считаем свободными.

В данной системе функции $W(x, y)$ и $U(x, y)$ задают величину и направление потока. Известны начальные условия для координат первоначального местоположения, а выбор начального условия для угла остаётся свободным. В работе рассматривается частный случай потока:

$$W(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \quad U(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = a\mathrm{x}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Цель управления — максимизация горизонтальной дальности за фиксированное время T:

$$J = -\mathrm{x}\left(T\right) \to \min_{\theta}. \tag{4}$$

В качестве управления возьмем угол θ.

С помощью принципа максимума Понтрягина была получена следующая краевая задача

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\theta, \\ \dot{y} = V\sin\theta + px, \\ \dot{V} = -V - \dfrac{1}{2}pV\sin 2\theta, \\ \dot{\theta} = \dfrac{2\cos 2\theta\left(\sin\theta + p\cos^3\theta\right)}{3\cos\theta - \cos 3\theta}, \end{cases} \tag{5}$$

где x, y, V — безразмерные переменные, $p = \dfrac{a}{k}$.

Краевые условия

$$x\,(0) = 0, \quad y\,(0) = 0, \quad V\,(0) = 1, \quad \theta\,(T) = 0. \tag{6}$$

Анализ системы (5) проведён с помощью качественных методов исследования динамических систем, а также было построено численное решение краевой задачи использованием системы `Matlab`.

Литература

1. Zermelo, Ernst (1931). «Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung». Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 114-124.
2. A. MIELE, Optimal Abort Landing Trajectories in the Presence of Windshear, JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS: VOL 55, No. 2, NOVEMBER 1987.