Вероятностные расширения многозначных логик

Научный руководитель – Зайцев Дмитрий Владимирович

Константинов Александр Сергеевич
Студент (бакалавр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия
E-mail: alexandr.konstantinov2000@gmail.com

Данный доклад посвящается логикам вероятностей – одной из ветвей логики как философской и математической дисциплины. Основы логик вероятностей (probability logics) были заложены в ряде фундаментальных статьей конца XX века. [1, 2, 4] Обобщая результаты, концептуально суммируя их содержание, мы можем определить, что логикой вероятностей как логической теорией можно называть логическую систему анализирующую суждения типа «вероятность истинности утверждения $\varphi \boxplus x$», где $\boxplus \in \{>, <, \geq, \leq, =\}$, $x \in [0, 1]$, и их модификации, как, например, представлено в [2]. Интерпретация стандартной вероятностной семантики (standart probabilistic semantics), по выражению [3], определяется, как и во многих других работах, следующим образом:

$$\mathcal{M} = \langle W, H, \mu, v \rangle, \tag{1}$$

Где W – непустое множество, называемое множеством возможных миров, H – сигма-алгебра на множестве W, μ – вероятностная мера, $v : H \times Prop \to \{0, 1\}$, работающая как обычная оценка классической логики. Таким образом, упорядоченная тройка $\langle W, H, \mu \rangle$ – это вероятностное пространство в колмогоровском смысле, а вероятностная интерпретация получается добавлением к вероятностному пространству пропозициональной оценки.

Одна из крупных школ, развивающих логику вероятностей, строя исчисления, по большей степени гильбертовского типа – представители Белградского университета. Данная школа вводит понятие вероятностного расширения логики (probabilistic extension of logic). Их исследования ограничиваются классической пропозиционльной логикой, [8] классической логикой предикатов, [7] темпоральными логиками [6] и интуиционистскими логиками. [5] Удивительным оказывается отсутствие построенных вероятностных расширений многозначных логик и исчислений гильбертовского типа для них. Эту задачу, помимо обзорной, и преследует данный доклад. В нем приводится построенное расширение трехзначной логики Поста с выделенным значением 1, используемой в качестве иллюстративного материала, в то же время аналогичным образом могут быть расширены другие функционально-полные многозначные логики.

Аксиомы:

A0. Все теоремы исчисления $AxP_3^{\{1\}}$; Для всяких $A, B, C \in ProbF$:

A1. $A \to (B \to A)$

A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3. $((A \wedge B) \to A)$

A4. $((A \wedge B) \to B)$

A5. $(A \to (B \to (A \wedge B)))$

A6. $(\neg\neg A \to A)$

A7. $((A \to (A \vee B))$

A8. $((B \to (A \vee B))$

A9. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B) \to C))$

A10. $P_{\geq 0}\varphi$, для всякого $\varphi \in PropF$

A11. $\varphi \to P_{\geq 1}\varphi$

A12. $P_{\leq r}\varphi \to P_{lt;s}\varphi,\ sgt;r$

A13. $P_{lt;s}\varphi \to P_{\leq s}\varphi$

A14. $((P_{\geq r}\varphi \wedge P_{\geq s}\psi) \wedge P_{\leq 0}(\varphi \,\&;\, \psi)) \to P_{\geq min(1,r+s)}(\varphi \curlyvee \psi)$

A15. $(P_{\leq r}\varphi \wedge P_{lt;s}\psi) \to P_{lt;r+s}(\varphi \curlyvee \psi),\ r+s \leq 1$

A16. $\neg P_{\geq s}\varphi \leftrightarrow P_{lt;s}\varphi$

A17. $\neg P_{\leq s}\varphi \leftrightarrow P_{gt;s}\varphi$

A18. $P_{\geq 1-x}(\sim \varphi) \leftrightarrow P_{\leq x}(\varphi \curlyvee \sim\sim \varphi)$

A19. $P_{\geq 1-x}(\sim\sim \varphi) \leftrightarrow P_{\leq x}(\varphi \curlyvee \sim \varphi)$

A20. $P_{\leq 1-x}(\sim \varphi) \leftrightarrow P_{\geq x}(\varphi \curlyvee \sim\sim \varphi)$

A21. $P_{\leq 1-x}(\sim\sim \varphi) \leftrightarrow P_{\geq x}(\varphi \curlyvee \sim \varphi)$

Правила:

R1. $\dfrac{A, A \to B}{B}$

R2. $\dfrac{\forall s > 0\ \forall k \geq \frac{1}{s} : A \to P_{\geq s - \frac{1}{k}}\varphi}{A \to P_{\geq s}\varphi}$

Назовем данный тип расширения расширением многозначной логики по сербскому типу. Тогда можно сформулировать критерий, согласно которому если в единственной матрице многозначной логике выразимы функции f_1, f_2, f_3 такие, что:

$$[f_1(A,B)] = [A] \cup [B] \tag{2}$$

$$[f_2(A,B)] = [A] \cap [B] \tag{3}$$

$$[f_3(A)] = W \setminus [A] \tag{4}$$

Тогда ее можно аксиоматизировать с помощью исчисления гильбертовского типа по сербскому типу.