Качественное исследование модели распространения инфекционных заболеваний Кермака-Маккендрика

Ян Эньпин

Студент, 2 курс магистратуры

Факультет ВМК, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, Шэньчжэнь, КНР

E-mail: yangep@smbu.edu.cn

Научный руководитель — *Семендяева Наталья Леонидовна*

Одной из первых математических моделей распространения инфекционных заболеваний является модель, предложенная шотландскими учёными Уильямом Огилви Кермаком и Андерсоном Греем Маккендриком около 100 лет назад [1]. Упрощённый её вариант, называемый моделью SIR, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для переменных, описывающих изменение концентрации инфицированных особей популяции, здоровых особей с приобретённым иммунитетом и без иммунитета (соответственно, x, y и z):

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = nk_1xz - k_2x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k_2x, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -nk_1xz. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь k_1 – скорость заражения, k_2 – скорость выздоровления $\left[\text{ед. вр.}^{-1}\right]$, $k_1, k_2 \neq 0$, n – среднее число друзей особи; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z = 1$.

Модель SIR использовалась для описания распространения малярии и чумы в средние века, более поздних эпидемий гриппа, в том числе свиного, кори, гепатита, краснухи [2], пандемии COVID-19 [3]. Как правило, основные усилия исследователей направлены на уточнение модели SIR с целью адекватного описания распространения конкретной эпидемии и построения достоверных краткосрочных прогнозов. При этом многие её свойства, а также свойства её модификаций остаются не изученными.

В данной работе основное внимание уделено теоретическим аспектам модели распространения инфекций SIR. Построено точное решение задачи Коши в интегральном виде. Выполнен качественный анализ стационарных состояний, определены точки покоя и их тип (рис. 1). Впервые получено выражение значений координат точек покоя через W-функцию Ламберта для произвольных начальных данных.

Иллюстрации

Рис. 1. Положение точек покоя системы 1 на 2-симплексе $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z=1$. Значения параметров: $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $n = 4$. Сплошная линия – устойчивые точки покоя; $A\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ – устойчивая точка покоя. Пунктирная линия – неустойчивые точки покоя. Тонкие линии – фазовые траектории системы.

Литература

1. Kermack W.O., McKendrick A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Statistical Society, London, 1927, Vol.A, №115, P.700–721.
2. Siettos C.I., Russo L. Mathematical modeling of infectious disease dynamics // Virulence, 2013, V.4, №4, P.295-306.
3. Jayatilaka R., Patel R., Brar M., Tang Y., Jisrawi N.M., Chishtie F., Drozd J., Valluri S.R. A mathematical model of COVID-19 transmission //Materials Today: Proceedings, 2022, Vol.54., P.101-112.