目　录

摘　要

关键字：不确定关系；量子力学；理论物理
中图分类号：O413.1

符号表

x	坐标
p	动量
$\psi(x)$	波函数
$\langle x\|$	左矢（bra）
$\|x\rangle$	右矢（ket）
$\langle \alpha\|\beta\rangle$	内积

第一部分

引言

表面波研究是地球物理测深中的一种新方法。该方法的特点是低频率，低速度，高振幅和高信噪比。近年来，该方法已被广泛应用于小深度地球物理探测（在莫霍表面以上，约 30-40 公里深）、深部地震学研究和许多其他科学领域。地震表面波的直接问题主要是通过研究和计算瑞利表面波的色散度。分段常数平面层状介质的经典方法是汤姆森哈斯卡尔旋转矩阵方法 [3]。在实践中，数值计算有高频精度损失的问题。为了解决这个问题，已经开发了一些新的方法 [4–11]。陈晓飞提出了计算平面波 [12–15] 色散度的广义反射透射系数法（GR/TC）。该方法找到了离散方程的正确根，即它提供了一个“根搜索”过程。随着层的次数的增加，“根搜索”过程的复杂性会增加。在文章中，作者通过引入地震阻抗张量，可以得到一种新的频散方程，并且使用了一个微分方程系统去解这个微分方程。通过使用四阶的龙格库塔方法解该系统后，得到了基本的瑞丽面波的色散曲线。但是，步的大小的抽样会影响微分方程的计算速度和精确度（若步的大小足够大，就会失去精确度；若步的大小足够小，则计算速度会很慢）在这篇基于地震阻抗张力的文章中，我们引入了一种新的迭代张量比来弥补这个缺陷。

第二部分

论文主体

第 1 章　层状介质中弹性动力学方程及地震波方程

1.1　弹性介质中的广义胡克定律

弹性介质——在给定的热力学条件下，如果介质中的任一点的应变分量由该店的应力分量决定，而与应力的历史无关，这种介质称为完全弹性介质。[] 。在无穷小应变理论中其基本假设是 $|e_{ij}| << 1$ 。完全弹性介质中的本构关系可以用数学公式描述为 $\tau_{ij} = \tau_{ij}(0) + (\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}})_0 e_{kl}$ 。令 $C_{ijkl} = (\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}})_0$，则 $\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$，这就是广义胡克定律。

1.2　横向各向同性介质本构关系

如果介质中某点的物理性质与方向有关, 那么该介质称为各向异性的, 如具有晶体结构的介质。在地球介质中由于受力状态的不均匀，有些部位的介质在力的作用下介质的性质在宏观上按一定的方向排列, 使得介质的性质在宏观上表现为各向同性。如果介质中某点的物理性质与方向无关, 那么该介质称为各向同性介质。如果介质的性质是旋转轴对称的, 该介质称为横向各向同性介质。对于横向各向同性介质我们可以用三阶旋转矩阵:

$$A = \begin{Bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

进行坐标变换。

进行坐标变换后，广义胡克定律可变换成 $\tau_{ij} = \lambda e_{nm}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$ 其中 λ 和 μ 被称为拉梅（Lame）常数。

1.3　弹性动力学方程及地震波方程

波满足的弹性动力学方程。设在任意给定的时刻 t , 在所考虑的介质中任意取一个体积单元 V, 其表面为 S 充分光滑), 表面的外法线单位矢量用 $\hat{n}$ 表示。

作用在 S 面上的总面力, 应该是 $\oint_s \tau \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S$。设单位体积受到的力 f 为, 整个体积单元 V 受到的总体力为 $\iint f\ dV$ 。（能量守恒）根据牛顿第二定律, 这一体积

单元将在其表面应力、体积力和惯性力的作用下达到平衡, 由此可得

$$\oint_{s} \tau \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S + \iint_{V} f\, \mathrm{d}V - \iiint_{V} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, \mathrm{d}V = 0 \tag{1.2}$$

用下角标求和的形式表示为

$$\iint_{S} \tau_{ij} n_j\, \mathrm{d}s + \iiint_{V} f_i\, \mathrm{d}V - \iiint_{V} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\, \mathrm{d}V = 0 \tag{1.3}$$

其中, 为介质的密度。利用高斯积分公式得

$$\oint_{s} \tau \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \iiint_{V} \nabla \cdot \tau \mathrm{d}V \tag{1.4}$$

用下角标求和的形式表为代人式 (3.1.2) 得到

$$\oint_{s} \tau_{ij} n_j\, \mathrm{d}s = \iiint_{V} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\, \mathrm{d}V \tag{1.5}$$

由于体积单元 V 是任意取的, 所以式 (3.1.5) 中的被积函数必须为零, 得到

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \tag{1.6}$$

即

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \tag{1.7}$$

式 (3.1.7) 即为弹性动力学方程。具体的求解式 (3.1.7) 还需要知道应力-应变关系及相应的边界条件。对于各向同性介质 (胡克定律)

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{i,j} u_{b,k} + \mu \left(u_{i,j} + u_{i,i} \right) \tag{1.8}$$

把式 (3.1.8) 代人式 (3.1.7) 可以得到位移表示的各向同性介质中的弹性动力学方程

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = u_{k,k} \partial_i \lambda + \lambda u_{k,ki} + \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \partial_j \mu + \mu \left(u_{i,jj} + u_{j,ij} \right) + f_i \tag{1.9}$$

用矢量符号的形式可表示为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \lambda \nabla \cdot u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + \nabla \mu \cdot (\nabla u + u \nabla) + \mu \nabla^2 u + f \tag{1.10}$$

其中. 并且矢 $u\nabla$ 是 ∇u 的转置, 即如果 ∇u 的分量形式为 $u_{j,i}$,$u\nabla$ 的分量形式为 $u_{i,j}$, 利用等式 $\nabla \times \nabla \times u = \nabla\nabla \cdot u - \nabla^2 u$ 可以把式 (3.1.10) 表示为另一种形式

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \lambda \nabla \cdot u + \nabla \mu \cdot (\nabla u + u \nabla) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot u - \mu \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \tag{1.11}$$

式 (3.1.11) 是各向同性介质中最一般形式的弹性动力学方程。对于地震波的激发问题,f 为震源等价体力。如果考虑地球的自由振荡问题, 体力项还应包含地球的

自重力,更精细地讨论时还应考虑地球自转引起的科里奥利力等。如果式 (3.1.11) 中不包括体力项 f,就简化为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla\lambda\nabla\cdot u + \nabla\mu\cdot(\nabla u + u\nabla) + (\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot u - \mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{1.12}$$

该方程为震源区外的地震波方程。

求解式 (3.1.11) 或式 (3.1.12) 是理论地震学中最重要的研究方向,包含理论震相特征分析、地震波的走时计算,计算理论地震图等。对于横向非均匀介质,由于介质参数梯度的存在,使得式 (3.1.12) 的求解变得非常困难,目前还没有精确的解析解。对于水平层状的一维介质,可以把介质的梯度层分成许多薄层,每个薄层都是均匀的,当薄层的厚度比优势波长小得多的时候，这种近似就能达到足F的精度。目前,水平均匀层状介质中地震波的激发和传播问题已有足够精确的解。对于一般的横向非均匀介质,可采用高频近似射线理论来求解。但是,任何形式的高频近似者会失去波动的效应。一般情况下,都是求给定边界条件下的特解。对于复杂介质,可以用有限差分方法求解。在有限差分计算中,一般是直接对式 () 与式 (3.1.8) 联立求解。首先对介质格点化,计算格点的位移和应力。时间和空间离散化后，它们的导数用差分的形式计算。理论上,有限差分方法可以处理任意复杂的介质模型,优点是简单易行,缺点是计算耗时,计算结果跟实际观测数据一样难以解释。在复杂介质及边界条件下求解方程 (3.1.7) 的解析解是相当困难的。在高频条件下,求射线近似解。如果介质是均匀的,式 (3.1.12) 就简化为

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot u(x,t) - \mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u(x,t)} \tag{1.13}$$

$$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot u(x,t) - \mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u(x,t)} - \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.14}$$

必须强调，式子 (1.14) 只是均匀各项同性介质中的地震波方程。为了窥视均匀各项同性介质中地震波的特征，在频率域内讨论可能更加方便，因此，对式子 (1.14) 做时间域的傅里叶变换可得

$$\frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}(x,\omega) - \frac{\mu}{\rho}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}(x,\omega) + \omega^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\omega) = 0 \tag{1.15}$$

定义 $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}}$ (P 波波速), $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$(S 波波速), 代入式 (3.1.14) 得

$$\alpha^2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\omega) - \beta^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}(x,\omega) + \omega^2\boldsymbol{u}(x,\omega) = 0 \tag{1.16}$$

式（3.1.15）是频率域中均匀各向同性介质的地震波方程。令式（3.1.12) 有如下形式的解

$$\boldsymbol{u}(x,\omega) = \boldsymbol{u}_\alpha(x,\omega) + \boldsymbol{u}_\beta(x,\omega) \tag{1.17}$$

满足附加条件

$$\nabla \times \boldsymbol{u}_a = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_\beta = 0 \tag{1.18}$$

满足式 (3.1.15) 式 (3.1.17) 的 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{u}_\beta$ 一定相互独立。因为如果 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{u}_\beta$ 不独立，它们之间就可以相互表达，假设 $u_o = cu_\beta$，其中，c 为非零常数。两边取散度，根据式 (3.1.17)，推得 $\nabla.\boldsymbol{u}_\alpha = 0$。对 $\boldsymbol{u}_\alpha = c\boldsymbol{u}_\beta$ 两边取旋度，则推得 $\nabla \times \boldsymbol{u}_\beta = 0$。所以，$u_\alpha$ 与 $\boldsymbol{u}_\beta$ 的旋度和散度都为零。再由式 (3.1.16) 推得 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \nabla \times \boldsymbol{u} = 0$。根据式 (3.1.15)，最后推得 $\boldsymbol{u}(x, \omega) \equiv 0$。这与 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \omega)$ 不能恒等于 0 的假设相矛盾，所以 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{u}_\beta$ 一定相互独立。将式 (3.1.16) 代人式 (3.1.15)，并利用附加条件式 (3.1.17) 得

$$\alpha^2 \nabla\nabla \cdot u_\alpha - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}_\beta + \omega^2 \left(\boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{u}_\beta\right) = 0 \tag{1.19}$$

利用公式 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u} - \nabla^2 \boldsymbol{u}$ 及解的附加条件式（3.1.17）得

$$\left(\alpha^2 \nabla^2 \boldsymbol{u}_\alpha + \omega^2 \boldsymbol{u}_\alpha\right) + \left(\beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{u}_\beta + \omega^2 \boldsymbol{u}_\beta\right) = 0 \tag{1.20}$$

由于 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{u}_\beta$ 相互独立，推出 $\alpha^2 \nabla^2 \boldsymbol{u}_\alpha + \omega^2 \boldsymbol{u}_\alpha = 0, \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{u}_\beta + \omega^2 \boldsymbol{u}_\beta = 0$。令 $k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}$(P 波波数)，$k_\beta = \frac{\omega}{\beta}$(S 波波数)，得到

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{u}_\alpha + k_a^2 \boldsymbol{u}_\alpha &= 0 \\ \nabla^2 \boldsymbol{u}_\beta + k_\beta^2 \boldsymbol{u}_\beta &= 0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

第 2 章　计算层状介质中瑞利面波频散的正问题

2.1　层状介质中瑞利面波频散的计算方法

在本节中，通过引入地震阻抗张量，我们建立了一个新的数学模型来有效地计算层状介质中的面波特征。设一个边界为 $z = z_n, n \in [0, n]$ 的分层介质，其中 $z_0 = 0$ 代表地球表面。在每层内部 $z \in \left[z_{n-1}, z_n\right], n \in [1, n]$。让我们把地震参数 λ_n，μ_n 和 ρ_n 作为常数。在这种分层介质中，行波沿 O_X 轴传播。行波中的位移矢量由下式给出：

$$\vec{U}(x, y, z) = \bar{u}(z) e^{i\gamma x + i\omega t} \tag{2.1}$$

式中 $i = \sqrt{-1}$，ω 为地震场频率，γ 为行波传播常数（特征），$\bar{u}(z) = (u_x, u_y, u_z)$ 为行波振幅。根据我们简化模型中的假设，在一层内 (例如在 $z \in [z_{n-1}, z_n]$ 中) $\vec{U} = \left(U_x, U_y, U_z\right)$ 满足常系数的应力方程

$$\begin{gathered} \left(\lambda_n + 2\mu_n\right) \nabla\nabla \cdot \vec{U} - \mu_n \nabla \times \nabla \times \vec{U} + \omega^2 \rho_n \vec{U} = 0 \\ z \in \left[z_{n-1}, z_n\right] \end{gathered} \tag{2.2}$$

在分层的边界上，保持偏移 $\bar{U}(z)$ 和张力δ_{ij} 的连续性的条件是:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} div \bar{U}(z) + \mu \left(\frac{\partial \bar{U}(z)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}(z)}{\partial x_i}\right), \left\{x_i\right\} = \{x, y, z\}, i \in [1, 3] \tag{2.3}$$

将拉梅方程中的面波表达式和应力表达式代入，我们可以得到

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) i\gamma \left(i\gamma u_x(z) + u_z'(z)\right) - \mu \left(-u_x'' + i\gamma u_z'\right) + \omega^2 \rho u_x = 0, \\ -\mu \left(u_y'' - \gamma^2 u_y\right) + \omega^2 \rho u_y = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \left(i\gamma u_x'(z) + u_z''(z)\right) - \mu \left(i\gamma \left(u_x' - i\gamma u_z\right)\right) + \omega^2 \rho u_z = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \mu \left(i\gamma u_z(z) + u_x'(z)\right), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu) u_z'(z) + \lambda i\gamma u_x(z), \end{aligned} \tag{2.5}$$

面波的偏振与坐标 Oy 无关，因此 $u_y(z) = 0$。因此，我们得到一个与位移 u_x, u_z 相关的二元方程组。简化（1.4），我们有

$$\begin{cases} u_x'' + a_x^2 u_x + b_1 u_z' = 0, \\ u_z'' + a_z^2 u_z + b_2 u_x' = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

· 其中 $a_x^2 = \frac{\rho\omega^2-(\lambda+2\mu)\gamma^2}{\mu}$, $b_1 = \frac{(\lambda+\mu)i\gamma}{\mu}$, $a_z^2 = \frac{\rho\omega^2-\mu\gamma^2}{\lambda+2\mu}$, $b_2 = \frac{(\lambda+\mu)i\gamma}{\lambda+2\mu}$.

当 $z \to \infty, u_x, u_z \to 0$ 时，我们要确保 $\operatorname{Im} a_x \neq 0$ 和 $\operatorname{Im} a_z \neq 0$。

$$a_x = i\sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)\gamma^2-\rho\omega^2}{\mu}}, \quad a_z = i\sqrt{\frac{\mu\gamma^2-\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}}. \tag{2.7}$$

方程组 (2.6) 通过指定的向量形式的微分方程组来求解:

$$\frac{d\bar{V}}{dz} = \hat{A}\bar{V}, \tag{2.8}$$

其中 $\bar{V} = \left(v_1 = u_x, v_2 = u_z, v_3 = u_x', v_4 = u_z'\right)$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_x^2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & -a_z^2 & -b_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

微分方程 (2.8) 有通解 $\bar{V} = \bar{Y}e^{\eta z}$ 的充要条件是具有以下形式

$$\det(\hat{A}-\eta E) = \det\begin{pmatrix} -\eta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 & 1 \\ -a_x^2 & 0 & -\eta & -b_1 \\ 0 & -a_z^2 & -b_2 & -\eta \end{pmatrix} = 0. \tag{2.10}$$

我们可以得到如下解:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{\gamma^2 - \tfrac{\omega^2\rho}{\mu}}, \quad \eta_3 = -\sqrt{\gamma^2 - \tfrac{\omega^2\rho}{\mu}}, \\ \eta_2 &= \sqrt{\gamma^2 - \tfrac{\omega^2\rho}{(\lambda+2\mu)}}, \quad \eta_4 = -\sqrt{\gamma^2 - \tfrac{\omega^2\rho}{(\lambda+2\mu)}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

这四个根 η 是矩阵 $\hat{A}$ 的特征值。因此，对于矩阵 $\hat{A}$，我们得到如下形式的四个特征向量

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[-i\eta_1, -\gamma, -i\eta_1^2, -m_1\right]^T, \\ a_2 &= \left[-i\eta_1, \gamma, i\eta_1^2, -\eta_1\right]^T, \\ a_3 &= \left[\gamma, -i\eta_2, \eta_2, -i\eta_2^2\right]^T, \\ a_3 &= \left[\gamma, i\eta_2, -\eta_2, -i\eta_2^2\right]^T. \end{aligned}$$

则方程 (2.8) 有如下解

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) \operatorname{diag}\left(e^{\eta_1 z}, e^{-\eta_1 z}, e^{\eta_2 z}, e^{-\eta_2 z}\right) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

向量场 $\vec{U}$ 的 x 分量和 z 分量可表示为

$$\begin{cases} u_x = -i\eta_1 e^{\eta_1 z} C_1 - i\eta_1 e^{-\eta_1 z} C_2 + \gamma e^{\eta_2 z} C_3 + \gamma e^{-\eta_2 z} C_4, \\ u_z = -\gamma e^{\eta_1 z} C_1 + \gamma e^{-\eta_1 z} C_2 - i\eta_2 e^{\eta_2 z} C_3 + i\eta_2 e^{-\eta_2 z} C_4. \end{cases} \tag{2.13}$$

将 (13) 代入应力的连续条件 (3)，可得

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= -P_1 e^{\eta_1 z} C_1 + P_1 e^{-\eta_1 z} C_2 + P_2 e^{\eta_2 z} C_3 - P_2 e^{-\eta_2 z} C_4, \\ \sigma_{zz} &= -P_3 e^{\eta_1 z} C_1 - P_3 e^{-\eta_1 z} C_2 - P_4 e^{\eta_2 z} C_3 - P_4 e^{-\eta_2 z} C_4, \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中 $P_1 = i\mu\left(\gamma^2 + \eta_1^2\right)$，　$P_2 = 2\mu\eta_2\gamma$，　$P_3 = 2\mu\eta_1\gamma$，　$P_4 = i\left((\lambda + 2\mu)\eta_2^2 - \lambda\gamma^2\right)$
以下边界条件对分层介质来说是成立的: 1. 位移和应力的连续性:

$$\begin{aligned} u_x\left(z_j\right)\Big|_{z=z_j+0} &= u_x\left(z_j\right)\Big|_{z=z_j-0}, \\ u_z\left(z_j\right)\Big|_{z=z_j+0} &= u_z\left(z_j\right)\Big|_{z=z_j-0}, \\ \sigma_{xz}\left(z_j\right)\Big|_{z=z_j-0} &= \sigma_{xz}\left(z_j\right)\Big|_{z=z_j+0}, \\ \sigma_{zz}\left(z_j\right)\Big|_{z=z_j-0} &= \sigma_{zz}\left(z_j\right)\Big|_{z=z_j+0}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

在地球表面，应力张量消失，表达式 (5),(6) 的形式为

$$\begin{cases} \sigma_{xz}\big|_{z=0} = 0 \\ \sigma_{zz}\big|_{z=0} = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

3. 当 $z \to \infty$ 时, 我们有

$$u_x(z) = 0, \quad u_z(z) = 0 \tag{2.17}$$

我们需要让

$$u_x(z=0) = u_x^0, \quad u_z(z=0) = u_z^0$$

与位移 u_x, u_z 相关的地震波阻抗张量 σ_{xz}, σ_{zz} 大小的关系可以用下面的线性方程组来表达:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = Z_{xx} u_x + Z_{xz} u_z \\ \sigma_{zz} = Z_{zx} u_x + Z_{zz} u_z \end{cases} \tag{2.18}$$

其中 $\hat{Z} = \begin{vmatrix} Z_{xx} & Z_{xz} \\ Z_{zx} & Z_{zz} \end{vmatrix}$

$\hat{Z}$ 是二阶地震阻抗张量。注意到，阻抗张量在不连续点 λ, μ, ρ 是连续的，因为应力和位移是连续的。如果我们在 z=0 处确定阻抗张量，即 $\hat{Z}(z=0) = \hat{Z}^0$，那么，根据应力边界条件，在 $z = 0$ 我们有:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(z=0) = Z_{xx}^0 u_x(z=0) + Z_{xz}^0 u_z(z=0) = 0 \\ \sigma_{zz}(z=0) = Z_{zx}^0 u_x(z=0) + Z_{zz}^0 u_z(z=0) = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

对于震动中的面波的存在，除零以外，条件还必须满足 $u_x(0)$ 和 $u_y(0)$。

$$\det \hat{Z}^0 = Z^0_{xx}Z^0_{zz} - Z^0_{xz}Z^0_{zx} = 0 \tag{2.20}$$

这是一个用于确定行波传播常数 γ 与频率 ω 和层状介质参数之间关系的频散方程。如果方程的根存在，那么对于一个给定的 γ，我们可以从（1.14）中找到面波中位移振幅的比率。这是用于确定行进波 γ 的传播常数与频率 ω 和层状介质参数的函数的频散方程。

$$\frac{u_x(z=0)}{u_x(z=0)} = -\frac{Z^0_{xz}}{Z^0_{xx}} = -\frac{Z^0_{zz}}{Z^0_{zx}}. \tag{2.21}$$

因此，一切都简化为确定 $z = 0$ 处的阻抗张量。让我们推导出阻抗张量的方程组。为此，我们从 (1.12) 中得到位移 u_x , u_z 的 z 级导数。

$$\begin{cases} \dfrac{du_x}{dz} = \dfrac{1}{\mu} Z_{xx}(z)u_x(z) + \left(\dfrac{1}{\mu} Z_{xz}(z) - i\gamma\right) u_z(z) \\ \dfrac{du_z}{dz} = \dfrac{1}{\lambda+2\mu}\left(Z_{zx}(z) - i\gamma\lambda\right) u_x(z) + \dfrac{1}{\lambda+2\mu} Z_{zz}(z)u_z(z). \end{cases} \tag{2.22}$$

然后，在该层内，λ、μ 是常数，我们找到位移的二阶导数。

$$\frac{d^2u_x}{dz^2} = \frac{1}{\mu}\left(Z'_{xx}(z)u_x(z) + Z_{xx}(z)u'_x(z) + Z'_{xz}(z)u_z(z) + Z_{xz}(z)u'_z(z)\right) - i\gamma u'_z(z) \tag{2.23}$$

$$\frac{d^2u_z}{dz^2} = \frac{1}{\lambda+2\mu}\left(Z'_{zz}(z)u_z(z) + Z_{zz}(z)u'_z(z) + Z'_{zx}(z)u_x(z) + Z_{zx}(z)u'_x(z) - i\gamma\lambda u'_x(z)\right) \tag{2.24}$$

将 (28) 中的 $u'_x(z), u'_z(z)$ 代入这些表达式，我们最后得到

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_x}{dz^2} =& \left(\frac{1}{\mu}Z'_{xx} + \frac{1}{\mu^2}Z^2_{xx} + \frac{Z_{xz}Z_{zx} - i\gamma\lambda Z_{xz}}{\mu(\lambda+2\mu)} - \frac{\gamma^2\lambda + i\gamma Z_{zx}}{(\lambda+2\mu)}\right)u_x \\ &+ \left(\frac{Z_{xz}Z_{xx} - i\mu\gamma Z_{xx}}{\mu^2} + \frac{1}{\mu}Z'_{xz} + \frac{Z_{xz}Z_{zz}}{\mu(\lambda+2\mu)} - \frac{i\gamma Z_{zz}}{\lambda+2\mu}\right)u_z, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_z}{dz^2} =& \left(\frac{Z'_{zx}}{\lambda+2\mu} + \frac{Z_{zz}Z_{zx} - i\gamma\lambda Z_{zz}}{(\lambda+2\mu)^2} + \frac{Z_{zx}Z_{xx}}{\mu(\lambda+2\mu)} - \frac{i\gamma\lambda Z_{xx}}{\mu(\lambda+2\mu)}\right)u_x \\ &+ \left(\frac{Z'_{zz}}{\lambda+2\mu} + \frac{Z^2_{zz}}{(\lambda+2\mu)^2} + \frac{Z_{zx}Z_{xz} - i\mu\gamma Z_{zx}}{\mu(\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda\mu\gamma^2 + i\gamma\lambda Z_{xz}}{\mu(\lambda+2\mu)}\right)u_z. \end{aligned} \tag{2.26}$$

将 (28)-(32) 中的第一和第二导数代入 Lame 方程 (2)，我们得到

$$\begin{gathered}\left(Z_{xx}' - \left(i\lambda\mu\gamma\left(Z_{xz} - Z_{zx}\right) - (\lambda+2\mu)Z_{xx}^2 - \mu Z_{xz}Z_{zx}\right.\right.\\ \left.\left.+4\mu^2\gamma^2(\lambda+\mu) - \omega^2\rho\mu(\lambda+2\mu)\right)\right)u_x + \left(Z_{xz}' - \left((\lambda+2\mu)i\mu\gamma Z_{xx}\right.\right.\\ \left.\left.-i\mu\lambda\gamma Z_{zz} - (\lambda+2\mu)Z_{xx}Z_{xz} - \mu Z_{xz}Z_{zz}\right)\right)u_z = 0\\ \left(Z_{zx}' + \left((\lambda+2\mu)i\mu\gamma Z_{xx} - i\gamma\mu\lambda Z_{zz} + (\lambda+2\mu)Z_{zx}Z_{xx} + \mu Z_{zx}Z_{zz}\right.\right.\\ \left.\left.-(\lambda+2\mu)\mu^2\gamma^2 + (\lambda+2\mu)\rho\mu\omega^2\right)\right)u_x + \left(Z_{zz} + \left((\lambda+2\mu)i\mu\gamma Z_{xz}\right.\right.\\ \left.\left.-(\lambda+2\mu)i\mu\gamma Z_{zx} + (\lambda+2\mu)Z_{xz}Z_{zx} + \mu Z_{zz}^2 + (\lambda+2\mu)\mu^2\gamma^2\right)\right)u_z = 0.\end{gathered} \tag{2.27}$$

公式 (2.20) 被称为计算表面波频散曲线的直接问题。阻抗 $\hat{Z}^0(\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\rho},\bar{h},\omega,\gamma)$ 由方程组得到的阻抗为:

$$\begin{cases}\frac{dZ_{xx}}{dz} = i\lambda\mu\gamma\left(Z_{xz} - Z_{zx}\right) - (\lambda+2\mu)Z_{xx}^2 - \mu Z_{xz}Z_{zx} + 4\mu^2\gamma^2(\lambda+\mu) - \omega^2\rho\mu(\lambda+2\mu)\\ \frac{dZ_{zz}}{dz} = -(\lambda+2\mu)i\mu\gamma Z_{xz} - (\lambda+2\mu)i\mu\gamma Z_{zx} + (\lambda+2\mu)Z_{xz}Z_{xx} + \mu Z_{zz}^2 + \omega^2\rho\mu(\lambda+2\mu),\\ \frac{dZ_{xz}}{dz} = -(\lambda+2\mu)i\mu\gamma Z_{xx} - i\mu\lambda\gamma Z_{zz} - (\lambda+2\mu)Z_{xx}Z_{xz} - \mu Z_{xz}Z_{zz},\\ \frac{dZ_{zx}}{dz} = -(\lambda+2\mu)i\mu\gamma Z_{xx} - i\mu\lambda\gamma Z_{zz} - (\lambda+2\mu)Z_{zx}Z_{xx} - \mu Z_{zx}Z_{zz},\end{cases} \tag{2.28}$$

为了解决该系统，有必要将阻抗张量的初始值设定为 $z = z_N = H$（半空间表面）。知道 $Z(z=H) = \hat{Z}^H$ 后，$\hat{Z}(z)$ 的柯西问题很容易得到数值解，即:

$$\begin{cases}Z_{xx}^{(H)} = -\frac{\mu^{(H)}\eta_2^{(H)}\left(\eta_1^{2(H)} - \gamma^2\right)}{\eta_1{}^{(H)}\eta_2{}^{(H)} - \gamma^2}\\ Z_{xz}^{(H)} = -\frac{i\mu^{(H)}\gamma\left(\eta_1^{2(H)} - 2\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} + \gamma^2\right)}{\eta_1^{(H)}\eta_2{}^{(H)} - \gamma^2},\\ Z_{zx}^{(H)} = \left(\lambda^{(H)} + 2\mu^{(H)}\right)\frac{i\gamma\left(\eta_1^{(H)}\eta_2{}^{(H)} - \eta_2^{2(H)}\right)}{\eta_1^{(H)}\eta_2{}^{(H)} - \gamma^2} + i\gamma\lambda^{(H)},\\ Z_{zx}^{(H)} = \left(\lambda^{(H)} + 2\mu^{(H)}\right)\frac{i\gamma\left(\eta_1^{(H)}\eta_2{}^{(H)} - \eta_2^{2(H)}\right)}{\eta_1^{(H)}\eta_2{}^{(H)} - \gamma^2} + i\gamma\lambda^{(H)},\end{cases} \tag{2.29}$$

实验表明，在微分方程的数值解过程中，步的大小的选择直接影响到正向算法的计算速度和精度。因此，我们引入了一个势能函数，以获得层状介质中地震阻抗张量的新迭代关系。让我们在这里引入势能函数 $u_p(z)$ 和 $u_s(z)$。那么在浅层瑞利行波中，根据前面的本构关系，我们有

$$\begin{aligned}u_x &= -u_s'(z) + i\gamma u_p(z)\\ u_z &= i\gamma u_s(z) + u_p'(z)\end{aligned} \tag{2.30}$$

此处我们可以得到 $u_s(z)$ 和 $u_p(z)$ 的解:

$u_s'' - \eta_s^2 u_s = 0$　, 当 $\eta_s = \sqrt{\gamma^2 - k_s^2}, k_s = \frac{\omega}{v_s}, \mathrm{Re}\,\eta_s > 0,\quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$——横波速度

$u_p'' - \eta_p^2 u_p = 0$, 当 $\eta_p = \sqrt{\gamma^2 - k_p^2}, k_p = \frac{\omega}{v_p}, \mathrm{Re}\,\eta_p > 0,\quad v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ ——纵波速度

$\gamma > k_s > k_p$

考虑一个层中的场 $z \in \left[z_{n-1}, z_n\right]$，常数 λ_n, μ_n, ρ_n，其中 $n \in [1, N]$， $z_0 = 0$， $z_N = -\infty$， $h = z_n - z_{n-1}$-层的厚度。在 $n-_M$ 层中 $u_p(z)$ 和 $u_s(z)$ 可以表示为:

$u_s(z) = \overset{(n)}{A_s} e^{\eta_s\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_s} e^{-\eta_s(n)(z-z_n)}$

$u_p(z) = \overset{(n)}{A_p} e^{\eta_p\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_p} e^{-\eta_p(n)(z-z_n)}$

那么在这一层，我们有位移场分量

$$\begin{aligned}
u_x(z) &= i\gamma(\overset{(n)}{A_p} e^{\eta_p\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_p} e^{-\eta_p(n)(z-z_n)}) - \overset{(n)}{\eta}_s (\overset{(n)}{A_s} e^{\eta_s\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_s} e^{-\eta_s(n)(z-z_n)}) \\
u_z(z) &= i\gamma(\overset{(n)}{A_s} e^{\eta_s\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_s} e^{-\eta_s(n)(z-z_n)}) + \overset{(n)}{\eta}_p (\overset{(n)}{A_p} e^{\eta_p\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_p} e^{-\eta_p(n)(z-z_n)})
\end{aligned} \tag{2.31}$$

应力张量（3）根据关系（4）对于第 n 层的两个分量看起来像

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz} &= \mu\left(i\gamma u_z(z) + u_x'(z)\right) = Z_{xx}u_x + Z_{xz}u_z \\
\sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)u_z'(z) + \lambda i\gamma u_x(z) = Z_{zx}u_x + Z_{zz}u_z
\end{aligned} \tag{2.32}$$

然后通过在 (-14)-(15) 的左侧替换 (12)、(13)，我们发现:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz} = \mu(-(\gamma^2 - \overset{(n)}{\eta_s^2}))(\overset{(n)}{A_s} e^{\eta_s\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_s} e^{-\eta_s(n)(z-z_n)}) + \\
+2i\gamma \overset{(n)}{\eta}_p (\overset{(n)}{A_p} e^{\eta_p\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_p} e^{-\eta_p(n)(z-z_n)})
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} = 2i\gamma\mu \overset{(n)}{\eta}_s (\overset{(n)}{A_s} e^{\eta_s\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_s} e^{-\eta_s(n)(z-z_n)}) + \\
+((\lambda + 2\mu) \overset{(n)}{\eta_p^2} - \lambda\gamma^2)(\overset{(n)}{A_p} e^{\eta_p\overset{(n)}{(z-z_n)}} - \overset{(n)}{B_p} e^{-\eta_p(n)(z-z_n)})
\end{aligned} \tag{2.34}$$

方程（17）中的部分 $((\lambda + 2\mu) \overset{(n)}{\eta_p^2} - \lambda\gamma^2)$ 可以进行如下的等式化简:

$$\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\eta_p^2 - \lambda\gamma^2 \\
=&(\lambda + 2\mu)\left(\gamma^2 - k_p^2\right) - \lambda\gamma^2 \\
=&2\mu\gamma^2 - \rho\omega^2 \\
=&\mu\left(\gamma^2 + \eta_s^2\right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

那么应力（17）可以被改写为:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} = \mu\left(\gamma^2 + \eta_s^2\right)(\overset{(n)}{A_p} e^{\eta_p\overset{(n)}{(z-z_n)}} - \overset{(n)}{B_p} e^{-\eta_p(n)(z-z_n)}) + \\
+2i\gamma\mu \overset{(n)}{\eta}_s (\overset{(n)}{A_s} e^{\eta_s\overset{(n)}{(z-z_n)}} + \overset{(n)}{B_s} e^{-\eta_s(n)(z-z_n)})
\end{aligned} \tag{2.36}$$

那么对于 $z=z_n$ 处的 n 层（在下边界），位移和应力可以用以下形式表示：

$$
\begin{aligned}
u_z\left(z_n\right) &= i\gamma\left(\overset{(n)}{A}_p+\overset{(n)}{B}_p\right)-\eta_s\left(\overset{(n)}{A}_s-\overset{(n)}{B}_s\right)\\
u_z\left(z_n\right) &= i\gamma\left(\overset{(n)}{A}_s+\overset{(n)}{B}_s\right)+\eta_p\left(\overset{(n)}{A}_p-\overset{(n)}{B}_p\right)
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xz}\left(z_n\right) &= \mu(-(\gamma^2-\overset{(n)}{\eta_s^2})(\overset{(n)}{A}_s-\overset{(n)}{B}_s)+2i\gamma\overset{(n)}{\eta}_p(\overset{(n)}{A}_p-\overset{(n)}{B}_p))\\
\sigma_{zz}\left(z_n\right) &= \mu\left(\gamma^2+\eta_s^2\right)(\overset{(n)}{A}_p-\overset{(n)}{B}_p)+2i\gamma\mu\overset{(n)}{\eta}_s(\overset{(n)}{A}_s-\overset{(n)}{B}_s)
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

在 $z=z_{n-1}$ 处（在上边界）有：

$$
\begin{aligned}
u_z\left(z_{n-1}\right) &= i\gamma\left(\overset{(n)}{A}_p e^{\overset{(n)}{\eta_p h}}+\overset{(n)}{B}_p e^{-\overset{(n)}{\eta_p h}}\right)-\eta_s\left(\overset{(n)}{A}_s e^{\overset{(n)}{\eta_s h}}-\overset{(n)}{B}_s e^{-\overset{(n)}{\eta_s h}}\right)\\
u_z\left(z_{n-1}\right) &= i\gamma\left(\overset{(n)}{A}_s e^{\overset{(n)}{\eta_s h}}+\overset{(n)}{B}_s e^{-\overset{(n)}{\eta_s h}}\right)+\eta_p\left(\overset{(n)}{A}_p e^{\overset{(n)}{\eta_p h}}-\overset{(n)}{B}_p e^{-\overset{(n)}{\eta_p h}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

$$
\sigma_{xz}\left(z_{n-1}\right) = \mu(-(\gamma^2-\overset{(n)}{\eta_s^2})(\overset{(n)}{A}_s e^{\overset{(n)}{\eta_s h}}-\overset{(n)}{B}_s e^{-\overset{(n)}{\eta_s h}})+2i\gamma\overset{(n)}{\eta}_p(\overset{(n)}{A}_p e^{\overset{(n)}{\eta_p h}}-\overset{(n)}{B}_p e^{-\overset{(n)}{\eta_p h}}))
\tag{2.40}
$$

$$
\sigma_{zz}\left(z_{n-1}\right) = \mu\left(\gamma^2+\eta_s^2\right)(\overset{(n)}{A}_p e^{\overset{(n)}{\eta_p h}}-\overset{(n)}{B}_p e^{-\overset{(n)}{\eta_p h}})+2i\gamma\mu\overset{(n)}{\eta}_s(\overset{(n)}{A}_s e^{\overset{(n)}{\eta_s h}}-\overset{(n)}{B}_s e^{-\overset{(n)}{\eta_s h}})
\tag{2.41}
$$

然后知道地震阻抗张量 $\hat{Z}(z_n)$，代替 (20) 和 (21) 我们得到一个方程组:

$$
\begin{cases}
i\gamma\left(\overset{(n)}{A}_p+\overset{(n)}{B}_p e^{-\overset{(n)}{\eta_p h}}\right)-\eta_s\left(\overset{(n)}{A}_s-\overset{(n)}{B}_s e^{-\overset{(n)}{\eta_s h}}\right)-u_z\left(z_{n-1}\right)=0\\
i\gamma\left(\overset{(n)}{A}_s+\overset{(n)}{B}_s e^{-\overset{(n)}{\eta_s h}}\right)+\eta_p\left(\overset{(n)}{A}_p-\overset{(n)}{B}_p e^{-\overset{(n)}{\eta_p h}}\right)-u_z\left(z_{n-1}\right)=0\\
\mu(-(\gamma^2-\overset{(n)}{\eta_s^2})(\overset{(n)}{A}_s-\overset{(n)}{B}_s e^{-\overset{(n)}{\eta_s h}})+2i\gamma\overset{(n)}{\eta}_p(\overset{(n)}{A}_p e^{\overset{(n)}{\eta_p h}}-\overset{(n)}{B}_p e^{-\overset{(n)}{\eta_p h}}))-Z_{xx}u_x(z_n)+Z_{xz}u_z(z_n)=0\\
\mu\left(\gamma^2+\eta_s^2\right)(\overset{(n)}{A}_p-\overset{(n)}{B}_p e^{-\overset{(n)}{\eta_p h}})+2i\gamma\mu\overset{(n)}{\eta}_s(\overset{(n)}{A}_s e^{\overset{(n)}{\eta_s h}}-\overset{(n)}{B}_s e^{-\overset{(n)}{\eta_s h}})-Z_{zx}u_x(z_n)+Z_{zz}u_z(z_n)=0
\end{cases}
\tag{2.42}
$$

解决这个方程组，参数 $\overset{(n)}{A}_s, \overset{(n)}{B}_s, \overset{(n)}{A}_p, \overset{(n)}{B}_p$ 可以表示为

$$
\begin{cases}
\overset{(n)}{A}_s=K_1\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_x\left(z_{n-1}\right)+K_2\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_z\left(z_{n-1}\right)\\
\overset{(n)}{B}_p=K_3\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_x\left(z_{n-1}\right)+K_4\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_z\left(z_{n-1}\right)\\
\overset{(n)}{A}_s=K_5\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_x\left(z_{n-1}\right)+K_6\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_z\left(z_{n-1}\right)\\
\overset{(n)}{B}_p=K_7\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_x\left(z_{n-1}\right)+K_8\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_z\left(z_{n-1}\right)
\end{cases}
\tag{2.43}
$$

通过将（24）代入（22），我们得到

$$\begin{cases} \sigma_{xz}\left(z_{n-1}\right) = Q_1\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_x\left(z_{n-1}\right) + Q_2\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_z\left(z_{n-1}\right) \\ \sigma_{zz}\left(z_{n-1}\right) = Q_3\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_x\left(z_{n-1}\right) + Q_4\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right)u_z\left(z_{n-1}\right) \end{cases} \tag{2.44}$$

其中 $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ 是取决于张量 $\hat{Z}(z_n)$ 和 $\lambda_n, \mu_n, \rho_n, h_n$ 常数的参数。因此，我们已经确定了 n 层的地震阻抗张量的迭代关系。

$$\hat{Z}\left(z_{n-1}\right) = \begin{vmatrix} Q_1\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right) & Q_2\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right) \\ Q_3\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right) & Q_4\left(\hat{Z}\left(z_n\right)\right) \end{vmatrix} \tag{2.45}$$

注意，得到的迭代关系从根本上拒绝了文献 [1] 中的微分方程（8）。设定一个层状介质的模型，在 $z = H$ 处使用 $\hat{Z}_H$ 值，很容易解决方程组并找到迭代关系 $\hat{Z}_0$。

第 3 章　实验结果