**Дифференциальные инварианты в задачах управления распределением температуры**

**Вольных М.М.**

студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,физический факультет, Москва, РоссияE–mail: *volnykh.mm17@physics.msu.ru*

Рассмотрим класс дифференциальных уравнений

$v\_{t}=v\_{xx}+f(x,v,u)$, (1)

который описывает распределение температуры $v$ в однородном бесконечном стержне. Функция $f$ описывет распределенный вдоль стержня источника тепла и зависит от температуры $v$ и управляющего параметра $u$. Мы считаем её гладкой, т.е. принадлежащей классу $C^{\infty }$.

Преобразования переменных $x, v $ будем называть *допустимыми*, если в результате получается уравнение такого же класса, но с другой функцией $f$. Кроме того, мы допускаем перепараметризацию управляющего параметра, т.е. преобразования вида $u\rightarrow U\left(u\right).$ Следуя Софусу Ли, будем искать инфинитезимальные преобразования, т.е. такие, которые получены в результате сдвига вдоль траекторий вдоль некоторого векторного поля. Можно показать, что такие векторные поля имеют вид

$$X=α∂\_{x}+\left(β+b(x)\right)∂\_{v}+c\left(u\right)∂\_{u}.$$

Здесь $α,β$ – произвольные константы, а $b,c$ – произвольные функции. Сдвиги вдоль этого векторного поля образуют псевдогруппу Ли.

Укажем дифференциальные инварианты действий этой псевдогруппы. Для этого введём пространство $J^{q}$ $q$-джетов гладких функций трёх переменных с каноническими координатами $x, v, u, f\_{σ}.$ Здесь $σ=\left(σ\_{1},σ\_{2},σ\_{3}\right)$ – мульти-индекс, $σ\_{i}=0,…,q$ и $\left|σ\right|=σ\_{1}+σ\_{2}+σ\_{3}\leq q.$ Допустимые преобразования порождают следующие векторные поля на пространстве $J^{q}$: $Z\_{1}=∂\_{x}$, $Z\_{2}=v∂\_{v}-f\_{000}∂\_{f\_{000}}$, $Z\_{3}=b(x)∂\_{v}$, $Z\_{4}=с(u)∂\_{u}$. Здесь $b, h$ – произвольные функции. Эти векторные поля образуют бесконечномерную алгебру Ли. Дифференциальные инварианты не должны зависеть от вида функций $b, c$. Мы находим их, решая систему уравнений $Z\_{i}^{(q)}\left(J\right)=0, (i=1,…,4)$ и приравния коэффициенты при этих функциях и их производных к нулю. Здесь $Z\_{i}^{(q)}$ – продолжения векторных полей $Z\_{i}$ в пространство $q$-джетов. В результате получаем следующую теорему.

**Теоерема 1.** *Дифференциальное уравнение* (1) *имеет один дифференциальный инвариант первого порядка*

$J\_{1}=\frac{f\_{010}}{f\_{000}^{2}}$

*и четыре – второго порядка:*

$J\_{21}=\frac{f\_{020}}{f\_{000}^{3}}$, $J\_{22}=\frac{f\_{010}f\_{110}-f\_{100}f\_{020}}{f\_{010} f\_{000}^{2}}$, $ J\_{23}=\frac{f\_{011}}{f\_{001}f\_{000}}$, $J\_{24}=\frac{f\_{010}f\_{101}-f\_{100}f\_{011}}{f\_{010}f\_{001}}$.

Построенные инварианты можно использовать при решении задач классификации и эквивалентности [1] уравнений вида (1).

**Литература**

Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.