С дискретной аддитивной подгруппой $\Gamma \subset \mathbb{C}$ можно связать стандартный набор функций Вейерштрасса $\wp, \zeta$ и σ по формулам

$$\wp(z;\Gamma) = \frac{1}{z^2} + \sum_{u\in\Gamma\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2}\right),$$

$$\zeta(z;\Gamma) = \frac{1}{z} + \sum_{u\in\Gamma\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-u} + \frac{1}{u} + \frac{z}{u^2}\right),$$

$$\sigma(z;\Gamma) = z \prod_{u\in\Gamma\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{u}\right) e^{\frac{z}{u} + \frac{z^2}{2u^2}}.$$

Кроме того, функции $g_2(\Gamma) = \sum_{u\in\Gamma\setminus\{0\}} \frac{60}{u^4}$, $g_3(\Gamma) = \sum_{u\in\Gamma\setminus\{0\}} \frac{140}{u^6}$.

устанавливают взаимнооднозначное соответствие между дискретными подгруппами в $\mathbb{C}$ и парами $(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2$.

Наконец, с парой $(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2$ связана алгебраическая кривая, аффинная часть которой задается уравнением в форме Вейерштрасса $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. Мы будем оперировать с корнями e_1, e_2, e_3 полинома $4x^3 - g_2x - g_3$ вместо самих коэффициентов g_2, g_3.

Пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ – подгруппа индекса 2 и пусть ω – такое комплексное число, что $\omega \in \Gamma' \setminus 2\Gamma$. Тогда $\Gamma' = Span(2\Gamma \cup \{\omega\})$.

Пусть теперь $\Gamma^{(n)} = Span(2^n\Gamma \cup \{\omega\})$. $\wp^{(n)}(z), \zeta^{(n)}(z), \sigma^{(n)}(z)$ - функции Вейерштрасса, соответствующие решеткам $\Gamma^{(n)}$. $e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, e_3^{(n)}$ - корни, соответствующие решеткам $\Gamma^{(n)}$. Обозначим также $\Gamma^{(\infty)} = Span(\{\omega\})$ и $\wp^{(\infty)}(z), \zeta^{(\infty)}(z), \sigma^{(\infty)}(z), e_1^{(\infty)}, e_2^{(\infty)}, e_3^{(\infty)}$ – данные, соответствующие данной подгруппе.

Функции Вейерштрасса, а также корни решетки Γ выражаются через корни функции Вейерштрасса решетки Γ^{n+1}. То есть $(\wp(z), \zeta(z), \sigma(z)) = F^{(n)}(\wp^{(n)}(z), \zeta^{(n)}(z), \sigma^{(n)}(z))$. Рассмотрим последовательность $(\wp_n(z), \zeta_n(z), \sigma_n(z)) = F^{(n)}(\wp^{(\infty)}(z), \zeta^{(\infty)}(z), \sigma^{(\infty)}(z))$. Она сходится квадратично быстро к $(\wp(z), \zeta(z), \sigma(z))$. В этом заключается основной результат работы и суть метода.

Благодаря данному методу можно вычислять квадратично быстро функции Вейерштрасса, периоды решеток через корни полинома, а также отображение Абеля.

1 Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

3. Chandrasekharan K. Elliptic functions. Berlin: Springer-Verlag, 1985.