Об определимости частичных графовых полуавтоматов своими полугруппами входных сигналов

Фарахутдинов Ренат Абуханович

Аспирант

Факультет КНиИТ СГУ имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: renatfara@mail.ru

***Научный руководитель** — Молчанов Владимир Александрович*

Графом называется структура $G = (X, \rho)$, где X — множество вершин графа, а $\rho \subset X \times X$ — отношение смежности, элементы которого называются дугами графа. Граф называется рефлексивным, если условие $(x, x) \in \rho$ выполняется для любой вершины $x \in X$. Граф $\widetilde{G} = (X, \rho^{-1})$ называется двойственным графом графа $G = (X, \rho)$. Граф $G = (X, \rho)$ называется тривиальным, если $\rho = \emptyset$ или $\rho = \Delta_X$ или $\rho = X \times X$.

Под полуавтоматом понимается автомат без выходных сигналов [1]. Полуавтомат $A = (X, S, \star)$ называется полугрупповым, если на множестве его входных сигналов определена ассоциативная бинарная операция $\cdot$, согласованная с функцией переходов $\star$ по правилу: $x \star (s_1 \cdot s_2) = (x \star s_1) \star s_2$ для любых $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$. Полугрупповой полуавтомат $A = (X, S, \star)$ называется графовым, если множество его состояний X наделено такой структурой графа $G = (X, \rho)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ функция переходов $\delta_s(x) = x \star s$ $(x \in X)$ является эндоморфизмом графа G. Символически такие полуавтоматы обозначаются $A = (G, S, \star)$. Ранее задача определимости графовых полуавтоматов над рефлексивными графами рассматривалась в работе [2].

Следуя [3], под частичным преобразованием множества X понимается однозначное бинарное отношение $f \subset X \times X$. Частичное преобразование f множества X называется частичным эндоморфизмом графа $G = (X, \rho)$, если для любых $x, y \in \mathrm{pr}_1\, f$ из $(x, y) \in \rho$ следует $(f(x), f(y)) \in \rho$. Множество всех частичных эндоморфизмов графа G с композицией образуют полугруппу $E(G)$, которая называется полугруппой частичных эндоморфизмов графа G.

Графовый полуавтомат $A = (G, S, \star)$, полугруппа входных сигналов S которого является полугруппой частичных эндоморфизмов графа состояний G, называется частичным графовым полуавтоматом над графом G. Частичный графовый полуавтомат $\text{p-Atm}(G) =$

$(G, E(G), \star)$ является универсально притягивающим объектом в категории частичных графовых полуавтоматов над графом G и называется универсальным частичным графовым полуавтоматом над графом G.

Изоморфизмом графового полуавтомата $A_1 = (G_1, S_1, \star_1)$, $G_1 = (X_1, \rho_1)$, на графовый полуавтомат $A_2 = (G_2, S_2, \star_2)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$, называется пара отображений $\gamma = (f, g)$, где $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм графа G_1 на граф G_2, $g : S_1 \to S_2$ — изоморфизм полугруппы S_1 на полугруппу S_2, причём для любых $x \in X$, $s \in S$ выполняется условие $f(x \star_1 s) = f(x) \star_2 g(s)$.

Основной результат работы состоит в решении задачи определимости универсальных частичных графовых полуавтоматов над рефлексивными графами их полугруппами входных сигналов. Следующая теорема утверждает, что для любого рефлексивного графа G универсальный частичный графовый полуавтомат $\text{p-Atm}(G) = (G, E(G), \star)$ определяется своей полугруппой входных сигналов $E(G)$ с точностью до изоморфизма и двойственности графа G.

Теорема 1. *Пусть G_1 и G_2 — нетривиальные рефлексивные графы, p-Atm$(G_1) = (G_1, E(G_1), \star_1)$ и p-Atm$(G_2) = (G_2, E(G_2), \star_2)$ — универсальные частичные графовые полуавтоматы над графами G_1 и G_2 с полугруппами входных сигналов $E(G_1)$ и $E(G_2)$ соответственно. Тогда следующие условия эквиваленты:*

1) *граф G_1 изоморфен графу G_2 или двойственному графу $\widetilde{G_2}$;*

2) *полугруппы входных сигналов $E(G_1)$ и $E(G_2)$ изоморфны;*

3) *полуавтомат p-Atm(G_1) изоморфен полуавтомату p-Atm(G_2) или полуавтомату p-Atm$(\widetilde{G_2})$.*

Литература

1. Лидл Р., Пильц Г. Прикладная абстрактная алгебра: Учеб. пособие / Пер. с англ. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1996.
2. Фарахутдинов Р. А. Относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов в классе полугрупп // Изв. вузов. Матем. 2022. № 1. С. 74–84.
3. Вагнер В. В. Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности // Изв. вузов. Матем. 1957. № 1. С. 81–88.