Восстановление интенсивностей тепловых источников в уравнении теплопроводности

Чжо Юйхао

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: `13711594055@163.com`

Научный руководитель — *Соловьева Светлана Ивановна*

Работа посвящена решению двух обратных задач для уравнения теплопроводности.

В первой задаче рассматривается задача для уравнения теплопроводности на плоскости:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(x,y,t), \quad (x,y) \in R^2, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in R^2. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть источник $F(x,y,t)$ представляет собой сумму плоских локализованных источников, интенсивность которых изменяется во времени:

$$F(x,y,t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\delta(x - x_j)\delta(y - y_j), \tag{2}$$

где $\delta(\xi - \xi_0)$ - дельта функция, сосредоточенная в точке ξ_0.

Сформулируем обратную задачу. Предположим, что точки $r_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, ..., n$, в которых сосредоточены локализованные источники, известны, а функции $\varphi_j(t)$, описывающие изменения их интенсивностей во времени, неизвестны. Требуется определить функции $\varphi_j(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (1) $u(x,y,t)$ в точках $\overline{r}_i = (\overline{x}_i, \overline{y}_i)$, а именно

$$u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, t) = g_i(t), \quad i = 1, 2, ..., m, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

где $\overline{r}_i$ - заданные точки, а $g_i(t)$ - заданные функции.

Вторая задача. Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в полупространстве

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(x,y,z,t), \quad (x,y) \in R^2, \quad z > 0, \quad t > 0, \\ u(x,y,z,0) = 0, \quad (x,y) \in R^2, \quad z > 0, \\ u_z(x,y,0,t) = 0, \quad (x,y) \in R^2, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь источник $F(x,y,z,t)$ также представляет собой сумму пространственно локализованных источников, интенсивность которых изменяется во времени:

$$F(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\delta(x-x_j)\delta(y-y_j)\delta(z-z_j) \tag{5}$$

где $\delta(\xi-\xi_0)$ - дельта функция, сосредоточенная в точке ξ_0.

Аналогично, предположим, что точки $r_j = (x_j, y_j, z_j)$, $z_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$, в которых сосредоточены локализованные источники, известны, а функции $\varphi_j(t)$, описывающие изменения их интенсивностей во времени, неизвестны. Обратная задача состоит в определении функций $\varphi_j(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (4) $u(x,y,z,t)$ в точках $\overline{r}_i = (\overline{x}_i, \overline{y}_i, 0)$, а именно

$$u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, 0, t) = g_i(t), \quad i = 1, 2, ..., m, \quad t \geq 0 \tag{6}$$

где $\overline{r}_i$ - заданные точки, а $g_i(t)$ - заданные функции.

В работе предложены методы решения рассматриваемых обратных задач. Данные методы основаны на редукции задач (1)-(3) и (4)-(6) к соответствующим системам интегральных уравнений Вольтерра 1 рода для неизвестных функций $\varphi_j(t)$ и, учитывая особенности ядер данных уравнений, применении метода регуляризации Тихонова.

Литература

1. Денисов А.М., Соловьева С.И. Задача определения изменения интенсивностей тепловых источников в уравнении теплопроводности // Пракладная математика и информатика No.69,М.: Изд-во факультета ВМК МГУ; МАКС Пресс, 2022.
2. Денисов А.М., Задача определения неизвестного источника в параболическом и гиперболичкском уравнениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т.55. No.5. С.830-835.