Аналитические функции являются одним из основных понятий в математическом анализе и имеют широкое применение в различных областях науки и техники. Классическая теорема В. К. Дзядыка [1] позволяет дать новое геометрическое определение аналитических функций. Теорема получила дальнейшее развитие и уточнение в работах других математиков [2] – [4]. Данное исследование также посвящено усилению упомянутой теоремы.

ТЕОРЕМА В. К. ДЗЯДЫКА. Пусть в некоторой области Ω заданы две действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, непрерывные вместе со своими частными производными. Тогда для того, чтобы функция $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ была аналитической или сопряженной к аналитической в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы все три поверхности

$$z = u(x,y), z = v(x,y), z = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$$

имели над произвольной областью $A \subset \Omega$ равные площади.

В данной работе рассмотрен случай, когда A является совокупностью всех замкнутых единичных квадратов и всех замкнутых единичных полукругов, лежащих в открытом круге (открытый круг обозначим как $\mathbb{B}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$). Приведённая ниже теорема 1 является главным итогом исследования.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R > \frac{\sqrt{65}}{8}$, u, v – вещественнозначные функции класса $C^1(\mathbb{B}_R)$. Тогда для того, чтобы одна из функций $u + iv, u - iv$, была аналитическая в $\mathbb{B}_R$, необходимо и достаточно, чтобы

1. площади поверхностей графиков функций $u, v, \sqrt{(u^2 + v^2)}$, расположенных над любым замкнутым единичным квадратом $K \subset \mathbb{B}_R$ были равны,

2. площади поверхностей графиков функций $u, v, \sqrt{(u^2 + v^2)}$, расположенных над любым замкнутым единичным полукругом $D \subset \mathbb{B}_R$ были равны.

Вопрос о точности значения радиуса в теореме остаётся открытым.

Литература

Дзядык В. К. Геометрическое определение аналитических функций // УМК., 1960.Т. 15.Вып. 1(91).С. 191–194.

Трохимчук Ю. Ю. Об одном критерии аналитичности функции // Укр. мат. журн., 2007.Т.59, № 10. С. 1410–1418.

Goodman A. On the criterium of analytical function // Amer. Math. Monthly, 1964. V. 71. P. 265–267.

Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 p.