Задача определения нелинейного коэффициента в одной модели динамики сорбции с учётом диффузии газа

Хуан Хайян

студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: huanghaiyang@yandex.com

Научный руководитель — *Щеглов Алексей Юрьевич*

Модель процесса поглощения газа в сорбционной колонне с учетом диффузии в газовом потоке имеет вид

$$u_t + a_t + \nu u_x = D u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$a_t = \varphi(u) - a, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad u(l,t) + \lambda\, u_x(l,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$a(x,0) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где D – коэффициент диффузии; λ –коэффициент пропорциональности между интенсивностью потока газа в правом крайнем участке трубки и разницей в концентрации газа в правом участке трубки и за пределами правого конца трубки; функция $u(x,t)$ определяет концентрацию (плотность) газа в секции x сорбционной трубки (колонки) в момент времени t; функция $a(x,t)$ определяет концентрацию газа в зернах сорбента, расположенных внутри трубки в секции x, зависит от времени t; функция $\mu(t)$ задает концентрацию газа в потоке на входе в трубку при $x = 0$; функция $\varphi(s)$ это изотерма сорбции, указывает на соотношение между плотностями газа в порах и в зернах сорбента.

В прямой задаче (1)–(4) требуется определить функции $u(x,t)$, $a(x,t)$ по заданным положительным значениям l, T, D, λ и заданным функциям $\mu(t)$, $\varphi(s)$.

В обратной задаче по известным значениям l, T, D, λ, известной функции $\mu(t)$ и дополнительно заданной функции $h(t)$, такая, что

$$h(t) = u_x(0,t), \qquad \forall t \in [0,T] \tag{5}$$

требуется определить изотерму сорбции $\varphi(s)$ и функции $u(x,t)$, $a(x,t)$.

Разрешимость задачи (1)–(4) предложена A. M. Denisov, S. R.

Tuikina и A. Lorenzi [1, 2] в виде условий на заданные функции:

$$\mu(t) \in C^1[0,T], \ \ 0 < \mu_o \leqslant \mu'(t) \leqslant \mu_1 \ \ \forall\, t \in [0,T], \ \ \mu(0) = \mu'(0) = 0, \tag{6}$$

$$\varphi(s), \varphi'(s) \in C(-\infty,\infty), \ \ 0 \leqslant \varphi'(s) \leqslant \varphi_0 \ \ \forall\, s \in (-\infty,\infty), \ \ \varphi(0) = 0. \tag{7}$$

При выполнении условий (6), (7) единственное решение прямой задачи (1)–(4) существует в виде функций $u(x,t)$, $a(x,t) \in C^{2,1}\left(\bar{Q}_{l,T}\right)$; такой, что $u_t(x,t) > 0$, $a_t(x,t) > 0$, $\forall x \in [0,l]$ $\forall t \in [0,T]$; $0 \leqslant u(x,t) \leqslant \mu(\tau)$, $0 \leqslant a(x,t) \leqslant \varphi\big(\mu(\tau)\big)$, $\forall (x,t) \in \overline{Q}_{l,\tau}$ $\forall \tau \in [0,T]$, где $Q_{l,T} = \{(x,t) : 0 < x < l,\, 0 < t \leqslant T\}$. Рассмотрим возможность получения решения задачи (1)–(4) из интегрального уравнения

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l+\lambda}\right)\mu(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{l + \left(\cos\left(\sqrt{\omega_n^*}\, l\right)\right)^2 \widehat{\lambda}} \int_0^t e^{-(D\omega_n^* + \beta)(t-\tau)} \times$$

$$\times \int_0^l e^{\frac{\nu}{2D}(x-s)} \left[\frac{\nu}{l+\lambda}\mu(\tau) - \left(1 - \frac{s}{l+\lambda}\right)\mu'(\tau) - \varphi\big(u(s,\tau)\big) + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau e^{-(\tau-\theta)} \varphi\big(u(s,\theta)\big)\, d\theta\right] \sin\left(\sqrt{\omega_n^*}\, s\right) ds\, d\tau\, \sin\left(\sqrt{\omega_n^*}\, x\right), \ (x,t) \in \overline{Q}_{l,T}, \tag{8}$$

в котором значения ω_n^* вычисляются из алгебраического уравнения

$$\sqrt{\omega} = -\frac{1}{\widehat{\lambda}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\omega}\, l\right). \tag{9}$$

После определения решения $u(x,t)$ уравнения (8), функция $a(x,t)$ вычисляется по формуле

$$a(x,t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \varphi\big(u(x,\tau)\big)\, d\tau, \qquad (x,t) \in \overline{Q}_{l,T}. \tag{10}$$

Уравнения (8), (9) и формула (10) могут быть использованы для восстановления решения обратной задачи (1)–(5).

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (№ 12171036) и Пекинским фондом естественных наук (ключевой проект № Z210001).

Литература

1.Denisov A. M., Tuikina S. R., "On some inverse problems of nonequilibrium sorption dynamics (in Russian),"Dokl. AS SSSR, **276**, No. 1, 100–102 (1984).

2.Denisov A. M., Lorenzi A., "Recovering an unknown coefficient in an absorption model with diffusion," J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **15**, No. 6, 599–610 (2007).