Метрические методы статистического разделения смесей вероятностных распределений

Смирнов Егор Геннадьевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: smirnov.egor.gena@mail.ru

Научный руководитель — *Королев Виктор Юрьевич*

Во многих областях прикладной математики рассматриваются случайные процессы $X(t)$, задаваемые стохастическим дифференциальным уравнением следующего вида:

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW, \tag{1}$$

где $W(t)$ - стандартный винеровский процесс, а коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ случайны и неизвестны в общем случае. Известно, что уравнения вида (1) широко используются в различных задачах, например, в задачах финансовой математики, а также в различных задачах геофизики для прогнозирования и анализа временных рядов. Также существует множество примеров уравнения (1) с конкретными видами зависимости коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ от случайного процесса $X(t)$, данные примеры описаны в моделях Леланда [4], Барлса–Сонера [5], Хестона [6], Кокса–Ингерсолла–Росса [7], а так же в других моделях стохастической волатильности ([8] - [11]). Чтобы успешно решать различные задачи, где фигурируют уравнения данного вида, особо важной задачей является статистическое оценивание функциональных коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$.

Вид данных коэффициентов зачастую зависит от природы самого процесса $X(t)$, так что целью работы является разработка метода для статистического оценивания этих коэффициентов, предсказания которого зависят не от «физической» структуры данных, а непосредственно от реализации случайного процесса.

В данной работе решается задача оценивания функциональных коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$. Для статистического оценивания коэффициентов уравнения используется следующая схема: пусть $n \geq 0$ и $t_1, t_2, ...t_n$ - моменты времени в которых можно наблюдать исследуемый процесс $X(t)$. Тогда распределение приращения $X(t_i) - X(t_{i-1})$ можно аппроксимировать распределением конечной смеси нормальных законов, т.е.

$$P(X(t_i) - X(t_{i-1}) < x) \approx \sum_{k=1}^{K} p_k \Phi(\frac{x - a_k}{b_k}) \tag{2}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Для оценивания параметров p_k, a_k и b_k используется метод, заключающийся в трактовке наблюдений, попавших в каждое окно (отрезка временного ряда) как независимой однородной выборки, по которой строится эмпирическая функция распределения $F_{t,n}(x)$. Здесь t – параметр, характеризующий положение (например, номер) окна, n – число наблюдений, попавших в окно («ширина окна»). Затем решается задача минимизации расстояния L_2 между этой $F_{t,n}(x)$ и смесью, стоящей в правой части (2), по параметрам p_k, a_k и b_k. Оптимизация расстояния проводится не во всех n точках, а выбирается M точек, таких что $M \geq 3K - 1$ (точек должно быть больше, чем оцениваемых параметров). Также в работе доказывается что точки $x_1, ..., x_M$ следует выбирать не случайно, а так, чтобы было верно равенство:

$$F_{t,n}(x_r + 1) - F_{t,n}(x_r) = F_{t,n}(x_r) - F_{t,n}(x_{r-1}), r = 1, ..., M - 1$$

.

Литература

1. Belyaev, K.P., Korolev, V.Y., Gorshenin, A.K. et al. Some Features of the Intra-Annual Variability of Heat Fluxes in the North Atlantic. Izv. Atmos. Ocean. Phys. 57, 619–631, 2021.

2. В. Ю. Королев. Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. – Москва: Изд-во Московского университета, 2011.

3. Korolev V. Yu., Zaks L. M., Zeifman A. I. On convergence of random walks generated by compound Cox processes to Levy processes // Statistics and Probability Letters, 2013. Vol. 83. No. 10. P. 2432–2438.

4. Leland H. E. Option pricing and replication with transactions

costs // J. Financ., 1985. Vol. 40. P. 1283–1301.

5. Barles G., Soner H. M. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black–Scholes equation // Financ. Stoch., 1998. Vol. 2. P. 369–397.

6. Heston S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility, with application to bond and currency options // Rev. Financ. Stud., 1993. Vol. 6. P. 327–343

7. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. A theory of the term structure of interest rates // Econometrica, 1985. Vol. 53. P. 385–407.

8. Hull J., White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities// J. Financ., 1987. Vol. 42. P. 281– 308.

9. Dupire B. Pricing with a smile // Risk, 1994. Vol. 7. P. 18–20.

10. Derman E., Kani J. Riding on a smile // Risk, 1994. Vol. 7. P. 32–39.

11. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М.: МЦНМО, 2016. 440 с.