Статистический анализ изменений значений магнитного поля земли во времени

Лобовский Михаил Александрович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: `lobovski11@gmail.com`

Научный руководитель — *Королев Виктор Юрьевич*

Во многих областях прикладной математики рассматриваются случайные процессы $X(t)$, задаваемые стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW, \tag{1}$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ – случайны и, вообще говоря, неизвестны. В частности, уравнения вида (1) широко используются в задаче ассимиляции данных при анализе разномасштабной изменчивости геофизических переменных [1]. В частности, модель геометрического броуновского движения

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW \tag{2}$$

где $a \in R, b > 0$.

В свой работе я пробую статистически оценить распределения случайных величин $a(t)$ и $b(t)$. Принимая во внимание структуру их функциональной зависимости от исходного процесса $X(t)$ (например, как в моделях Леланда, Барлса–Сонера, Хестона, Кокса–Ингерсолла–Росса или Беляева и др.), я нахожу оценки числовых параметров, входящих в эти модели.

Математически эту задачу можно сформулировать следующим образом: пусть $n > 0$ и $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n$ — моменты времени, в которые наблюдается процесс $X(t)$. Для простоты предположим, что $t_i - t_(i-1) = 1$ для любого $i > 0$. Обозначим $X_i = X(t_i), i = 1, ..., n$. Таким образом, анализируется временной ряд $X_1, ..., X_n$. Поскольку приращения винеровского процесса имеют нормальные распределения, из вида уравнения (1) вытекает, что распределение приращения $X_i - X_{i-1}$ процесса $X(t)$ можно аппроксимировать распределением вида:

$$P(X_i - X_{i-1} < x) \approx E\Phi(\frac{x - A_i}{B_i}), \tag{3}$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x \in R$$

$A_i \in R$ и $B_i > 0$ – случайные величины. В свою очередь, для распределений случайных величин A_i и B_i, по отношению к которым берется математическое ожидание в (3), можно использовать дискретную аппроксимацию. Тогда вместо (3) для распределения приращения $X_i - X_{i-1}$ можно применить приближение вида конечной смеси нормальных распределений

$$P(X_i - X_{i-1} < x) \approx \sum_{k=1}^{K} \Phi(\frac{x - a_k}{b_k}), \tag{4}$$

где $K \in N$, $p_k \geq 0$, $k = 1, ..., K$, $p_1 + ... + p_K = 1$. Очевидно, параметры p_k, a_k и p_k зависят также от i и изменяются при переходе от t_i к t_{i+1}.

Для решения задачи оценивания параметров сдвига (дрейфа) a_k, масштаба (диффузии) b_k и весов компонент p_k на каждом окне я написал на языке Python EM алгоритм, реализующий метод максимального правдоподобия.

Литература

1. Belyaev K., Kuleshov A, Tuchkova N. Tanajura C. A. S.. An optimal data assimilation method and its application to the numerical simulation of the ocean dynamics // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 2017. P. 1-14. DOI: 10.1080/13873954.2017.1338300