Применение полумарковских процессов для моделирования системы массового обслуживания $G|G|n$

Шумов Никита Александрович

Студент

Факультет МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва, Россия

E-mail: nashumov@edu.hse.ru

***Научный руководитель** — Гришунина Юлия Борисовна*

Исследование характеристик систем массового обслуживания производится с помощью имитационного моделирования и аналитически [1–3]. В представленной работе построена математическая модель СМО $G|G|n|\infty$ в виде двумерного полумарковского процесса $\xi(t) \in E$, E - множество пар (i, r), где i - число требований в системе в момент времени t, $r = 0$, если переход в i произошел после окончания обслуживания, $r = 1$, если переход в i произошел после прихода требования. Моменты t_n прихода и ухода требований для указанного двумерного процесса являются марковскими. Обозначим $\xi_n = (\xi(t_n + 0), r(t_n + 0))$ - вложенная марковская цепь.

Переходные вероятности вложенной марковской цепи $P_{ij}(ind) = P(\xi_{n+1} = j|\xi_n = i, r = ind),\ ind \in \{0, 1\}$ имеют вид:

$$P_{ij}(ind) =$$

$$= \begin{cases} 0, |j-i| \geq 2, \\ p_i^{(0,+)} = \int_0^\infty B_i(x) d\eta_X(x),\ j = i+1, ind = 0, i < n, \\ p_i^{(1,+)} = \int_0^\infty B_{i-1}(x)\overline{G}(x) dF(x),\ j = i+1, ind = 1, i \leq n, \\ p_{n+1}^{(0,+)} = \int_0^\infty B_{n-1}(x)\overline{G}(x) d\eta_X(x), j = i+1, ind = 0, i \geq n, \\ p_{n+1}^{(1,+)} = \int_0^\infty B_n(x) dF(x),\ j = i+1, ind = 1, i > n, \\ p_i^{(0,-)} = 1 - \int_0^\infty B_i(x) d\eta_X(x),\ j = i-1, ind = 0, i < n, \\ p_i^{(1,-)} = 1 - \int_0^\infty B_{i-1}(x)\overline{G}(x) dF(x),\ j = i-1, ind = 1, i \leq n, \\ p_{n+1}^{(0,-)} = 1 - \int_0^\infty B_{n-1}(x)\overline{G}(x) d\eta_X(x),\ j = i-1, ind = 0, i \geq n, \\ p_{n+1}^{(1,-)} = 1 - \int_0^\infty B_n(x) dF(x),\ j = i-1, ind = 1, i > n, \end{cases}$$

где $F(t)$ - функция распределения интервалов между поступлениями заявок, $G(t)$ - функция распределения времени обслуживания одной заявки в любом канале обслуживания, $\eta_X(t)$ - функция распределения времени перескока, $B_i(x) = \left[\frac{\int_x^\infty \overline{G}(t)dt}{\int_0^\infty \overline{G}(t)dt}\right]^i$, $B_n(x) = \left[\frac{\int_x^\infty \overline{G}(t)dt}{\int_0^\infty \overline{G}(t)dt}\right]^n$.

Обозначим $Q = ((q_0^{(0)}, q_0^{(1)}), (q_1^{(0)}, q_1^{(1)}), \ldots)$ - стационарное распределение вложенной марковской цепи.

Утверждение 1.

Компоненты стационарного распределения вложенной марковской цепи являются геометрической прогрессией при $j \geq n+1$, если $r = 0$ и при $j \geq n+2$, если $r = 1$: $q_{j+1}^{(r)} = c_r q_j^{(r)},\ r \in \{0, 1\},\ 0 < c_r < 1$.

Следствие 1.

Система уравнений для нахождения стационарного распределения вложенной марковской цепи имеет вид:

$$\begin{cases}
q_0^{(0)} = q_1^{(0)} p_1^{(0,-)} + q_1^{(1)} p_1^{(1,-)} \\
q_0^{(1)} = 0 \\
q_1^{(0)} = q_2^{(0)} p_2^{(0,-)} + q_2^{(1)} p_2^{(1,-)} \\
q_1^{(1)} = q_0^{(0)} \\
q_i^{(0)} = q_{i+1}^{(0)} p_{i+1}^{(0,-)} + q_{i+1}^{(1)} p_{i+1}^{(1,-)} \\
q_i^{(1)} = q_{i-1}^{(0)} p_{i-1}^{(0,+)} + q_{i-1}^{(1)} p_{i-1}^{(1,+)},\ 2 \leq i \leq n \\
q_{n+1}^{(0)} = q_{n+1}^{(0)} c_0 p_{n+1}^{(0,-)} + q_{n+2}^{(1)} p_{n+1}^{(1,-)} \\
q_{n+1}^{(1)} = q_n^{(0)} p_n^{(0,+)} + q_n^{(1)} p_n^{(1,+)} \\
q_{n+2}^{(1)} = q_{n+1}^{(0)} p_{n+1}^{(0,+)} + q_{n+1}^{(1)} p_{n+1}^{(1,+)} \\
c_1 q_{n+2}^{(1)} = q_{n+1}^{(0)} c_0 p_{n+1}^{(0,+)} + q_{n+2}^{(1)} p_{n+1}^{(1,+)} \\
\dfrac{1}{1-c_0} q_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=0}^{n} q_i^{(0)} + \dfrac{1}{1-c_1} q_{n+2}^{(1)} + \sum_{i=0}^{n+1} q_i^{(1)} = 1
\end{cases}$$

Утверждение 2.

Необходимое и достаточное условие существования стационарного распределения вложенной марковской цепи имеет вид:

$$0 < \frac{p_{n+1}^{(1,+)}}{p_{n+1}^{(0,-)}} < 1$$

Смысл данного условия состоит в том, что в среднем заявки поступают реже, чем успевают обслуживаться.

В прикладных задачах чаще требуется предельное распределение процесса $\xi(t)$, $\Pi = ((\pi_0^{(0)}, \pi_0^{(1)}), (\pi_1^{(0)}, \pi_1^{(1)}), \ldots)$, компоненты которого имеют вид:

$$\pi_j^{(r)} = \frac{\int_0^\infty \overline{F}_j(x)dx\ q_j^{(r)}}{\sum_{i=0}^\infty \int_0^\infty \overline{F}_i(x)dx\ q_i^{(0)} + \sum_{i=0}^\infty \int_0^\infty \overline{F}_i(x)dx\ q_i^{(1)}}, r \in \{0,1\},$$

где $\pi_j = \lim\limits_{t\to\infty} P(\xi(t) = (j,0)) + \lim\limits_{t\to\infty} P(\xi(t) = (j,1)) = \pi_j^{(0)} + \pi_j^{(1)}$ - предельное распределение первой компоненты, т.е. числа требований в системе, $F_i(x)$ - функция распределения времени пребывания в состоянии, зависит от последнего события в системе:

$$F_i(x, ind) =$$
$$= \begin{cases} 0, |j-i| \geq 2, \\ P(min\{\eta_{Y_1}, \ldots, \eta_{Y_k}, \eta_X\} < x) = 1 - B_i(x)\overline{\eta}_X(x), \\ \hfill j = i \pm 1, ind = 0, i < n, \\ P(min\{\eta_{Y_1}, \ldots, \eta_{Y_{k-1}}, Y_k, X\} < x) = 1 - B_{i-1}(x)\overline{G}(x)\overline{F}(x), \\ \hfill j = i \pm 1, ind = 1, i < n, \\ P(min\{\eta_{Y_1}, \ldots, \eta_{Y_{n-1}}, Y_n, \eta_X\} < x) = 1 - B_{n-1}(x)\overline{G}(x)\overline{\eta}_X(x), \\ \hfill j = i \pm 1, ind = 0, i \geq n, \\ P(min\{\eta_{Y_1}, \ldots, \eta_{Y_n}, X\} < x) = 1 - B_n(x)\overline{F}(x), \\ \hfill j = i \pm 1, ind = 1, i \geq n, \end{cases}$$

Литература

1. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания: Учебник. М.: Изд-во РУДН, 1995.
2. Тарасов В. Н., Карташевский И. В., Липилина Л. В. Исследование задержки в системе G/G/1 // Инфокоммуникационные технологии 2015. Т. 13, №2. С. 153–159
3. Блатов И. А., Карташевский В. Г., Киреева Н. В. Метод аппроксимации произвольной плотности распределения суммами экспонент // Вестник ВГУ. 2013. №2. С. 53–157