Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Теорема Хасьминского для уравнения Колмогорова с частично вырожденной матрицей диффузии

Научный руководитель – Шапошников Станислав Валерьевич

Шатилович Дмитрий Вячеславович

E-mail: dmitriy.shatilovich@math.msu.ru

Рассмотрим стационарное уравнение Колмогорова

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\partial_{x_j}\left(a^{ij}\mu\right) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\left(b^i\mu\right) = 0.$$

Существованию вероятностного решения уравнения Колмогорова посвящена известная теорема Хасьминского. Классическим глобальным условием теоремы Хасьминского является существование функции Ляпунова. Однако без дополнительных локальных условий на коэффициенты уравнения наличие функции Ляпунова еще не гарантирует существование вероятностного решения, что будет показано на нескольких примерах в настоящем докладе. Представляет интерес обобщение теоремы Хасьминского на случай частично вырожденной матрицы A. Такие уравнения возникают при исследовании стохастических уравнений тина Ланжевена, когда по части переменных диффузионный процесс описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а по остальным переменным — стохастическими дифференциальными уравнениями. Исследованию таких стохастических уравнений посвящены работы [1], [2]. Соответствующие параболические уравнения Колмогорова исследовались в статьях [3], [4]. В перечисленных выше работах отмечалось, что требования регулярности коэффициентов по переменным, по которым нет вырождения матрицы диффузии, можно ослабить. Естественно предположить, что в случае стационарного уравнения Колмогорова ситуация аналогична и в теореме Хасьминского по переменным, по которым нет вырождения, можно не требовать непрерывности коэффициентов уравнения. В докладе будет представлено обоснование этого предположения. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы обосновать регулярность проекции решения на координаты, по которым нет вырождения. Известно, что в случае невырожденной матрицы диффузии решение уравнения Колмогорова имеет регулярную плотность. В докладе будет показано, что схожее утверждение верно и в случае частичного вырождения для проекции меры на координаты, по которым диффузия не вырождается. Полученные результаты изложены в [5].

Источники и литература

1) Веретенников А.Ю. О стохастических уравнениях с вырождающейся по части переменных диффузией. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47, N. 1, С.189–196.

2) Леваков А.А., Васьковский М.М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии. Дифференциальные уравнения. 2007. Т.43, N 8, С.1029–1042.

3) Guillin A., Wang F.-Y. Degenerate Fokker–Planck equations: Bismut formula, gradient estimate and Harnack inequality. J. Diff. Eq. 2012. V. 253, N. 1. P.20–40.

4) Delarue F., Menozzi S. Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations. Journal of Functional Analysis. 2010. V. 259, N. 6, P.1577–1630.

5) С. В. Шапошников, Д. В. Шатилович, Теорема Хасьминского для уравнения Колмогорова с частично вырожденной матрицей диффузии, Математические заметки, том 115, вып.3, 2024.