

Сравнительный анализ методов предобуславливания для решения СЛАУ с матрицей жесткости

Научный руководитель – Вершинин Анатолий Викторович

Аристеев Сергей Алексеевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра вычислительной механики, Москва,
Россия

E-mail: aristeev@yandex.ru

Аннотация. В работе проведен сравнительный анализ методов предобуславливания, применяемых для ускорения сходимости метода сопряженных градиентов при решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих в задачах статической упругости, решаемых методом конечных элементов (МКЭ). Исследованы предобуславливатели Якоби, ILU (incomplete LU), IC (incomplete Cholesky) и алгебраический мультигрид. Разработан модуль для интеграции этих предобуславливателей с существующим FEM-решателем.

1. Введение

Статическая задача упругости описывает поведение тел под воздействием внешних сил в рамках теории упругости. Решение таких задач часто сводится к решению СЛАУ с матрицей жесткости, получаемой методом конечных элементов.

2. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) — это численный метод для решения задач теории упругости и других дифференциальных уравнений в частных производных. МКЭ преобразует непрерывную область в дискретную систему узлов и элементов, что позволяет аппроксимировать уравнения и получить СЛАУ для вычислений.

3. Метод сопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов — это итерационный метод решения СЛАУ, особенно эффективный для решения больших разреженных систем, характерных для МКЭ. Метод ищет решение, минимизируя функцию ошибки, и использует информацию о градиенте для нахождения направления следующего шага.

4. Применение сопряженных градиентов в МКЭ

Метод сопряженных градиентов широко применяется в МКЭ из-за его способности эффективно решать большие разреженные системы, что является типичным для задач статической упругости, где матрица жесткости обычно имеет большой размер и разреженный характер.

5. Предобуславливатели

Предобуславливание — это процесс модификации СЛАУ для улучшения условий сходимости итерационных методов. Рассмотрены следующие предобуславливатели:

- **Якоби** — диагональное предобуславливание, использующее элементы главной диагонали матрицы системы.
- **ILU (incomplete LU)** — метод, аппроксимирующий факторизацию LU матрицы, исключая заполнение для сохранения разреженности.
- **IC (incomplete Cholesky)** — разреженный вариант факторизации Холецкого для симметричных положительно определенных матриц.
- **Алгебраический мультигрид** — подход, использующий многоуровневую иерархию для ускорения сходимости на различных масштабах.

6. Разработка модуля

Разработан модуль для применения предобуславливателей в рамках существующего FEM-решателя. Это позволило интегрировать различные стратегии предобуславливания и оценить их влияние на скорость и эффективность решения СЛАУ.

7. Заключение

Сравнительный анализ показал, что применение предобуславливателей значительно улучшает сходимость метода сопряженных градиентов, сокращая время решения СЛАУ. Эффективность предобуславливания зависит от характеристик матрицы жесткости и специфики задачи. Разработанный модуль предоставляет гибкий инструмент для выбора оптимального предобуславливателя, учитывая требования конкретной задачи.