Секция «Геометрия и топология»

Алгебра Ли ассоциированная с p-центральным рядом для граф-произведений и гомологии петель пространства Дэвиса-Янушкевича

Научный руководитель – Панов Тарас Евгеньевич

Рахматуллаев Темурбек Анасбекович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: raxtemur@gmail.com

Аннотация. Мы описываем ограниченную алгебру Ли, ассоциированную с нижним p-центральным рядом граф-произведения групп $\mathbb{Z}_p$. В качестве приложения мы получаем изоморфизм между универсальной обертывающей алгебры Ли, ассоциированной с нижним 2-центральным рядом для прямоугольной группы Коксетера и гомологиями петель пространства Дэвиса–Янушкевича.

Полиэдральное произведение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ определено для последовательности пар топологических пространств $(X, A) = ((X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m))$ и симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$.

$$(X, A) = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \Big) \subset \prod_{i=1}^{m} X_i.$$

В случае, когда каждое A_i является точкой, полиэдральное произведение $X^{\mathcal{K}} = (X, pt)^{\mathcal{K}}$ содержит m-кратный букет $X_1 \vee \dots \vee X_m$ и содержится в m-кратном произведении $X_1 \times \dots \times X_m$. Полиэдральные произведения возникли в торической топологии [6] и в последнее время активно изучаются в теории гомотопий [5]. Важными примерами являются пространство Дэвиса–Янушкевича $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$, момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ и его вещественный аналог $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$. Существует также теоретико-групповой аналог полиэдральных произведений называемый *граф-произведением.*

$$G^{\mathcal{K}} = \mathop{\bigstar}_{k=1}^{m} G_k \big/ (g_i g_j = g_j g_i \text{ при } g_i \in G_i,\ g_j \in G_j,\ \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

Данный доклад фокусируется на изучении связи между фундаментальной группой вещественного момент-угол комплекса $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ и гомологиями петель для пространства Дэвиса-Янушкевича. Основной конструкцией в проведенной параллели является конструкция кольца Ли ассоциированного с центральной фильтрацией на группе. Вычисления проведенные в конструкции удается обобщить в на граф-произведение групп вида $\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}$.

Для любой группы G можно рассмотреть различные центральные ряды, то есть последовательности подгрупп $\mathcal{G} = \{G_k\}_{k \ge 1}$ для которых верно, что: $G_1 = G$, $G_{k+1} \subset G_k$, и $(G_k, G_l) \subset G_{k+l}$. Для каждого такого ряда можно рассмотреть ассоциированное кольцо Ли, получаемое как прямая сумма последовательных факторов ряда: $\bigoplus G_i / G_{i+1}$. Скобка в таком кольце соответствует коммутатору в группе. Классическая конструкция, изучаемая в таком контексте, — это кольцо Ли, ассоциированное с нижним центральным рядом: $\gamma_k = (\gamma_{k-1}, G)$, называемое также присоединенным кольцом Ли.

Автор настоящей работы выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю и наставнику, Панову Тарасу Евгеньевичу, за постановку научной задачи, неоценимую помощь в проведении исследования и всестороннее сопровождение на всём научном пути.

Фундаментальная группа вещественного момент-угол комплекса $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ изоморфна коммутанту прямоугольной группы Кокстера — группы с m образующими v_1, ..., v_m, соотношениями коммутирования $v_i v_j = v_j v_i$ для вершин, соединенных в графе, $i, j \in \mathcal{K}$, и соотношениями вида $v_i^2 = id$ для всех $i \in [m]$. Присоединенное кольцо Ли прямоугольной группы Кокстера является алгеброй Ли над Z_2. Проблема описания получаемой алгебры была частично изучена в работах [1, 2, 3, 4]. Было показано, что задача описания аддитивного базиса и отношений, даже в оценках ниже 4, является сложной. В этой работе мы представляем подход к изучению 2-ограниченных ассоциированных алгебр Ли как более естественных объектов над полем характеристики 2. Для этого объекта известен изоморфизм с групповым кольцом [7], который значительно помогает в явном описании копредставления. В итоге удается доказать изоморфизм 2-ограниченной присоединенной алгебры Ли групп Кокстера с так называемой 2-граф алгеброй Ли:

$$L_{\mathcal{K}}^{[2]} = FL_{Z_2}^{[2]}\left(u_1, \ldots, u_m\right) / \left(u_i^{[2]} = 0,\ [u_i, u_j] = 0 \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}\right)$$

Заметим, что группу Кокстера можно рассматривать как граф-произведение $\mathbb{Z}_2^{\mathcal{K}}$. Полученный результат удаётся обобщить, на случай граф-произведения групп $\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}$. Введем для формулировки более общего утверждения дополнительные обозначения. Назовем *тривиальной* р-алгеброй Ли фактор свободной р-алгебры Ли по единственному соотношению обращения в нуль р-степени на порождающих $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle = FL_p(u)/(u^{[p]} = 0)$. Тогда p-граф алгебру Ли можно ввести как граф-произведение тривиальных p-алгебр Ли:

$$L_{\mathcal{K}}^{[p]} = FL_p(u_1, \ldots, u_m)/\left(u_i^{[p]} = 0,\ [u_i, u_j] = 0 \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}\right) = \left(\mathbb{Z}_p\langle u\rangle\right)^{\mathcal{K}}.$$

Тогда в общем случае, полученный результат эквивалентен, тому, что функтор из категории групп в категорию р-ограниченных алгебр Ли $gr_{\bullet}\gamma^{[p]}$: $\mathrm{GRP} \to \mathrm{LIE}_p$ сохраняет граф-произведения элементарных абелевых p-групп.

В качестве следствия изоморфизма, для флаговых комплексов $\mathcal{K}$ мы получаем связь между фундаментальной группой полиэдральной степени вещественного бесконечномерного проективного пространства и алгеброй Понтрягина полиэдральной степени комплексного бесконечномерного проективного пространства:

$$\overline{U}\left(gr^{[2]}\pi_1\left(\left(\mathbb{R}P^{\infty}\right)^{\mathcal{K}}\right)\right) = H_*\left(\Omega\left(\mathbb{C}P^{\infty}\right)^{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}_2\right).$$

Источники и литература

1) Верёвкин Я. А.; *Присоединенная алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера.* Труды МИАН (2019), 305, 61-70.

2) Верёвкин Я. А. *Градуированные компоненты присоединенной алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера.* Труды МИАН 318 (2022), 31–42.

3) Верёвкин Я. А.; Рахматуллаев, Т. А. *О последовательных факторах нижнего центрального ряда прямоугольной группы Коксетера.* Матем. заметки (2024), принято к печати.

4) Панов Т. Е.; Рахматуллаев, Т. А. *Полиэдральные произведения, граф-произведения и р-центральные ряды* Мат. сборник (2024), принято к печати

5) Bahri, Anthony; Bendersky, Martin; Cohen, Frederick. *Polyhedral products and features of their homotopy theory.* In: *Handbook of Homotopy Theory.* CRC Press/Chapman Hall Handb. Math. Ser., CRC Press, Boca Raton, FL, 2020, pp. 103–144.

6) Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surveys Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
7) Quillen, Daniel. *On the associated graded ring of a group ring.* J. Algebra 10 (1968), 411–418.