Секция «Геометрия и топология»

Слоение Лиувилля интегрируемых биллиардов с острыми углами

Научный руководитель – Ведюшкина Виктория Викторовна

Левин Виктор Анатольевич
Студент (магистр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: viktor.levin@math.msu.ru

Применение теории Фоменко-Цишанга [1] к изучению топологии плоских криволинейных биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик (т.е. интегрируемых), начатое В. В. Козловым, Д. В. Трещевым [2] и В. Драговичем, М. Раднович [3] плодотворно. В частности, удалось найти интегрируемые биллиарды, которые лиувиллево эквиваленты известным интегрируемым системам динамики, геометрии (например, классическим случаям Эйлера, Лагранжа, геодезическим потокам на двумерных поверхностях). Это удалось установить, вычислив соответствующие инварианты лиувиллевой эквивалентности, т.е. меченые молекулы. Меченой молекулой [1] называется граф Риба дополнительного интеграла, определенного на изоэнергетической поверхности системы, снабженный дополнительной информацией о перестройках регулярных торов и о склейках бифуркаций друг с другом.

Тем не менее, данный подход можно применять к изучению биллиардов границы которых имеют прямые углы, или любые острые углы соизмеримые с π. Отражения траекторий, которые попадают точно в угол можно корректно доопределить так, чтобы близкие траектории до отражения оставались близкими траекториями и после отражения. А именно, если раствор угла составляет $\frac{\pi}{2k}$, то траектория после отражения лежит на той же прямой, что и до отражения. В случае, если раствор угла составляет $\frac{\pi}{2k+1}$, то траектория после соударения лежит на прямой, которая параллельна прямой траектории отраженной от биссектрисы этого угла, где $k \in \mathbb{Z}_+$

Утверждение 1.Слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности интегрируемого биллиарда в треугольнике описывается графом Фоменко следующего вида:

- Если углы треугольника равны $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$, то $A_{cl} - A_\mu$
- Если углы треугольника равны $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$, то $A_\mu - A_\mu$
- Если углы треугольника равны $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$, то $A_\mu - Kl - A_\mu$

Бифуркация A_{cl} описывает стягивание руглярных торов на цилиндр, бифуркация A_μ - стягивание руглярных торов на лист мебиуса, а Kl соответсвует слою, гомеоморфному бутылке Клейна.

Утверждение 2.Слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности интегрируемого биллиарда в секторе круга описывается графом Фоменко следующего вида:

- $A - A_{cl}$, с метками $r = 0, \varepsilon = 1$, если угол раствора равен $\frac{\pi}{2k}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$.
- $A - A_\mu$, с метками $r = 0, \varepsilon = 1$, если угол раствора равен $\frac{\pi}{2k+1}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$.

Источники и литература

1) Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1 / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. - Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. - 444 С.

2) Биллиарды: генетическое введение в динамику систем с ударами / Валрий Козлов В., Дмитрий Трещев В. // Издательство Московского университета, 1991. - 166 С.

3) Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе / Драгович Владимир, Раднович Милена, Зубченко Н. А (переводчик) // Институт компьютерных исследований, Москва, 2010. - 336 С.