Об объеме трипрямоугольного тетраэдра в сферическом пространстве

Научный руководитель – Абросимов Николай Владимирович

Байзакова Бибизада Полатовна

Студент (магистр)

Новосибирский государственный университет, Механико-математический факультет, Новосибирск, Россия

E-mail: b.baizakova@g.nsu.ru

В работе [1] получена формула для объемов трипрямоугольных тетраэдров в пространстве Лобачевского. В данной работе мы изучаем трипрямоугольные тетраэдры в сферической геометрии.

Сферическое пространство — это трехмерная сфера $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ с метрикой путей, индуцированной скалярным произведением в $\mathbb{R}^4$. Таким образом, геодезическими линиями в $\mathbb{S}^3$ служат дуги окружностей радиуса 1, а геодезическими поверхностями — двухмерные сферы единичного радиуса. Расстояние между парой точек в сферической геометрии определяется угловой мерой соединяющей их дуги единичной окружности.

Сферический тетраэдр — это выпуклая оболочка (в смысле сферической метрики) четырех точек (вершин тетраэдра) в $\mathbb{S}^3$.

Трипрямоугольный тетраэдр — это тетраэдр, имеющий три попарно ортогональных ребра с общей вершиной. Для дальнейших рассмотрений удобно задавать трипрямоугольный тетраэдр $T(\alpha, \beta, \gamma)$ в $\mathbb{S}^3$ длинами трех попарно ортогональных ребер с общей вершиной α, β, γ.

Без ограничения общности, будем рассматривать трипрямоугольный тетраэдр $T(\alpha, \beta, \gamma)$ в $\mathbb{S}^3$ в *стандартном положении*, то есть три его попарно ортогональных ребра выходят из общей вершины $V_1 = (1, 0, 0, 0)$ и направлены вдоль единичных окружностей S_{12}, S_{13}, S_{14}, лежащих в координатных плоскостях $\mathbb{R}^4$. Таким образом, вершины имеют координаты:

$$\begin{aligned} V_1 &= (1, 0, 0, 0), \\ V_2 &= (\cos\alpha, \sin\alpha, 0, 0), \\ V_3 &= (\cos\beta, 0, \sin\beta, 0), \\ V_4 &= (\cos\gamma, 0, 0, \sin\gamma). \end{aligned}$$

Теорема 1. *(критерий существования) Трипрямоугольный тетраэдр $T(\alpha, \beta, \gamma)$ реализуется в $\mathbb{S}^3$ с длинами трех ортогональных ребер при общей вершине, равными α, β, γ, если, и только если выполнена система неравенств*

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < \pi \\ 0 < \beta < \pi \\ 0 < \gamma < \pi. \end{aligned}$$

В предельном случае, когда одно из ребер имеет длину π, тетраэдр вырождается в тело с двумя диаметрально противоположными вершинами $(1, 0, 0, 0)$ и $(-1, 0, 0, 0)$, в каждой из которых сходятся одни и те же три ребра . Это тело образует $1/8$ долю трехмерной сферы. В другом предельном случае, когда одно из ребер имеет длину 0, тетраэдр теряет размерность.

Теорема 2. *(формула объема) Объем трипрямоугольного тетраэдра $T(\alpha, \beta, \gamma)$ в сферическом пространстве с длинами трех ортогональных ребер при общей вершине, равными α, β, γ, находится по формуле*

$$V(T(\alpha,\beta,\gamma)) = \int_0^{\alpha} \int_0^{B(\alpha_1)} \int_0^{C(\alpha_1,\alpha_2)} \cos\alpha_2 \, d\alpha_3 \, d\alpha_2 \, d\alpha_1, \tag{1}$$

где $B(\alpha_1) = \arccos \dfrac{1}{1+\tan^2\beta(\cos\alpha_1 - \cot\alpha \, \sin\alpha_1)^2}$.

Источники и литература

1) Abrosimov N. V., Stepanishchev S. V. The volume of a trirectangular hyperbolic tetrahedron // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2023. V. 20, № 1. P. 275–284.