Секция «Геометрия и топология»

Интерполяция и аппроксимация на компактах

Научный руководитель – Богатый Семеон Антонович

Аллахвердиева Севиндж Эльхан гызы
Студент (бакалавр)
Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: sevindzallphaerdieva@gmail.com

В данной работе рассматривается задача интерполяции в k точках с помощью заданных $(m+1)$ функций, заданных на компакте X, $f_0(x)=1$. Интерполяцию осуществляют обобщенные полиномы вида $f(x)=\sum_{i=0}^m \alpha_i f_i$.

Формулируется необходимое и достаточное условие существования такой системы F.

Определение. Отображение $F=(f_1,\dots,f_m):X\to\mathbb{R}^m$ называется k-регулярным, $1\le k\le m$, $k+1\le|X|$, если для любых различных $k+1$ точек $x_0,\dots,x_k$ несущая плоскость их образов имеет размерность k.

Теорема Рубинштейна связывает задачу интерполяции с k-регулярностью.

Теорема (Рубинштейна). Для линейно независимых функций $f_0=1,f_1,\dots,f_m$, заданных на компакте X, и числа $k\le m$ СУЭ:

1) $\forall x_0,\dots,x_k\in X$ и $t_0,\dots,t_k\in\mathbb{R}$ $\exists f_{\alpha_0,\dots,\alpha_k}(x)=\sum_{i=0}^m\alpha_i f_i(x)$, что $f(x_i)=t_i$ для $i=0,\dots,k$.
2) $\forall\phi\in C(X,\mathbb{R}^m)$ многогранник наилучшего приближения по заданной системе функций имеет размерность $\le m-k$.
3) Всякие $m-k+1$ линейно независимые полиномы имеют на X не более k общих нулей.
4) $\forall x_0,\dots,x_k\in X$ ранг матрицы $(f_i(x_j))_{i=0,}^{m}{}_{j=0}^{k}$ равен $k+1$.
5) Отображение $F=(f_1,\dots,f_m):X\to\mathbb{R}^m$ является k-регулярным.

Для натурального числа r и пространства X через $N_r(X)$ обозначим пространство всех нормированных мер на X, носитель которых имеет мощность не более r.

Пусть дано отображение $F:X\to\mathbb{R}^m$. Рассмотрим порожденное отображение $G_r(F):N_r(X)\to\mathbb{R}^m$ по формуле

$$G_r(F)(\mu)=\mu_1F(x_1)+\ldots+\mu_rF(x_r)-\text{барицентр образа носителя меры.}$$

Выводятся свойства отображения $G_r(F)$ при условии, что первоначальное отображение F является k-регулярным, при $k=2r-1$ или $k=2r$. Это дает необходимые условия существования k-регулярного отображения.

Источники и литература

1) S. A. Bogatyi, "On k-Regular Embeddings and Their Application to the Theory of Function Approximation," Sb. Math. 193 (2002), 73
2) В. Г. Болтянский, С. С. Рышков, Ю. А. Шашкин, "О k-регулярных вложениях и их применении к теории приближения функций", УМН, 15:6(96) (1960), 125–132
3) К. Борсук, "Замечания к вложимости множеств в евклидовы пространства", Труды III Всесоюзн. матем. съезда. Т. 4, 1959, С. 197–198