

## ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СОФОКУСНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ НА ПАРАБОЛОИДАХ

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

*Маланкин Андрей Павлович*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра теоретической механики и мехатроники,  
Москва, Россия

*E-mail: malankin555@mail.ru*

В настоящее время активно изучаются интегрируемые бильярды и их обобщения. Слоения Лиувилля плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик, исследовались в работах В. Драговича, М. Раднович [1] и В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [2], [3]. Отметим что, В. В. Ведюшкина ввела и рассмотрела новый класс интегрируемых бильярдов: бильярды на столах-комплексах, склеенных из плоских бильярдных столов. Как оказалось, такие бильярды моделируют слоения Лиувилля многих важных интегрируемых гамильтоновых систем (см. [4]).

Настоящая работа посвящена интегрируемым геодезическим бильярдам на параболоидах. Софокусные геодезические бильярды на эллипсоиде и гиперболоидах изучались Г. В. Белозеровым в работе [5].

Напомним, что *семейством софокусных параболоидов* в  $\mathbb{R}^3$  называется однопараметрическое семейство квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x^2}{4(a-\lambda)} + \frac{y^2}{4(b-\lambda)} = z - \lambda,$$

где  $a > b > 0$  — фиксированные числа, а  $\lambda$  — вещественный параметр.

**Определение 1.** *Бильярдным столом на параболоиде назовем замкнутую область, ограниченную конечным числом квадрик, софокусных с данной, и имеющую углы излома на границе равные  $\frac{\pi}{2}$ .*

Мы будем рассматривать следующую динамическую систему: материальная точка движется по бильярдному столу вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Такой бильярд является интегрируемым по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Его интегрируемость следует из знаменитой теоремы Якоби-Шаля.

Следуя В. В. Ведюшкиной, на множестве бильярдных столов (на фиксированной квадрике) введем следующее отношение эквивалентности.

**Определение 2.** *Будем говорить, что два бильярдных стола комбинаторно эквивалентны, если один из них может быть получен из другого последовательностью следующих преобразований:*

- *изменением сегмента границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, при этом значение изменяемого параметра  $\lambda$  при каждой деформации не может принимать значений  $a$  и  $b$ ;*
- *симметрией относительно координатных плоскостей.*

Автором получена полная классификация бильярдных столов на параболоидах относительно комбинаторной эквивалентности.

**Теорема 1.** *На эллиптическом параболоиде существует в точности 13 типов комбинаторно неэквивалентных бильярдных столов, а на гиперболическом параболоиде — ровно 9.*

Оказывается верным следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Бильярды на комбинаторно эквивалентных столах грубо лиувиллево эквивалентны.*

С помощью этого утверждения были найдены инварианты Фоменко-Цишанга бильярдных столов на всевозможных параболических бильярдных столах.

### Источники и литература

- 1) V. Dragovich, M. Radnovich Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dyn., 2009, Т. 14, № 4–5 С. 479–494.
- 2) В.В. Фокичева Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2014, № 4, С. 18–27.
- 3) В.В. Фокичева Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболами // Матем. сб., 2014, Т. 205, № 8, С. 139–160.
- 4) В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами // Докл. РАН, 2018, Т. 479, № 6, С. 607–610.
- 5) Г.В. Белозеров Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдных столов на квадратах в трехмерном евклидовом пространстве // Матем. сб., 2020, Т. 211, № 11, С. 3–40.