

**Инварианты Фоменко-Цишанга для бильярда в четырёхугольной области, ограниченной гиперболой внутри эллипса, в потенциальном поле четвёртого порядка**

**Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич**

**Тюрина Кристина Евгеньевна**

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия  
*E-mail: yushastic@gmail.com*

**Ключевые слова:** Бильярд, изоэнергетическая поверхность, инвариант Фоменко-Цишанга, интегрируемая гамильтонова система, интегрируемый бильярд, софокусные квадрики, бильярд в потенциальном поле, бифуркационная диаграмма. Софокусное семейство квадрик задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1, \quad (1)$$

где  $a > b > 0$  — параметры софокусного семейства,  $\lambda$  — параметр квадрики. Рассмотрим часть плоскости, ограниченную дугами софокусных квадрик из данного семейства. Пусть на материальную точку в этой бильярдной области действует полиномиальный потенциал четвёртой степени, рассмотренный в [1]. Он имеет вид

$$W(x, y) = -c_0(x^2 + y^2 - a - b) - c_1((x^2 + y^2 - a - b)^2 + ay^2 + bx^2 - ab). \quad (2)$$

Такой потенциал допускает два независимых первых интеграла

$$H(x, y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + W(x, y) \quad (3)$$

$$F(x, y) = \frac{bp_x^2 + ap_y^2}{2} - \frac{yp_x^2 - xp_y^2}{2} + (-c_1(x^2 + y^2 - a - b) - c_0)(ay^2 + bx^2 - ab) \quad (4)$$

Поэтому бильярд можно рассматривать как интегрируемую гамильтонову систему, к которой применим топологический подход к изучению её слоения Лиувилля на невырожденной изоэнергетической поверхности. А именно, вычисление грубой молекулы Фоменко, а также меченой молекулы-инварианта Фоменко-Цишанга (см [2]).

Рассмотрим четырёхугольную область на плоскости, ограниченную двумя выпуклыми дугами эллипса и двумя дугами некоторой гиперболы из софокусного семейства (1) с параметрами  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \Lambda$  соответственно. Рассмотрим бильярдную систему с указанным выше потенциалом и исследуем топологию возникающего слоения Лиувилля с помощью вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга и построения бифуркационных диаграмм отображения момента.

**Утверждение.** *Рассмотрим ограниченный эллиптико-гиперболический бильярд без фокусов с потенциалом вида (2). Тогда для любых значений параметров  $c_0$  и  $c_1$  бифуркационная диаграмма может состоять лишь из дуг следующих кривых:*

- $-c_1 a^3 + c_0 a^2 - ha + f = 0$
- $-c_1 b^3 + c_0 b^2 - hb + f = 0$
- $c_1 \Lambda^3 + c_0 \Lambda^2 + h\Lambda + f = 0$
- $f = 0$
- $f + \frac{2c_0^3 \pm 2(c_0^2 - 3c_1 h)^{\frac{3}{2}} - 9hc_1 c_0}{27c_1^2} = 0$

### Источники и литература

- 1) Пустовойтов С.Е., "Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2021, номер 5, 8–19
- 2) Болсинов А.В., Фоменко А.Т., "Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1"/ Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 444 С.

### Иллюстрации

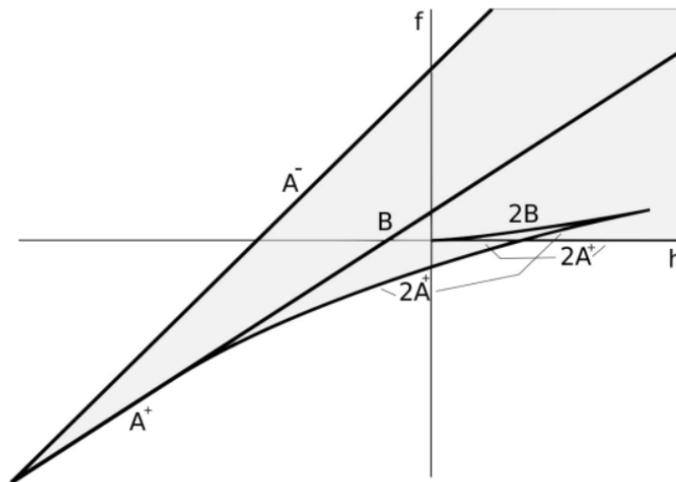


Рис. : Пример бифуркационной диаграммы