Секция «Геометрия и топология»

ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДОВ НА ПАРАБОЛОИДАХ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Маслов Даниил Денисович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: daniil.maslov@math.msu.ru

В настоящее время активно изучаются интегрируемые гамильтоновы системы (ИГС) с двумя степенями свободы. Таковыми системами, в частности, являются плоские биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик (см. [1], [2]), интегрируемые геодезические биллиарды на квадриках в $\mathbb{R}^3$ (см. [3]), а также обобщения этих систем путем добавления к ним интегрируемых потенциалов (см. [4], [5]). Настоящая работа посвящена изучению топологии слоения Лиувилля геодезических биллиардов на параболоидах в поле силы тяжести.

Определение 1. *Семейством софокусных параболоидов называется множество квадрик, заданных уравнением*

$$z - \lambda = \frac{x^2}{4(a-\lambda)} + \frac{y^2}{4(b-\lambda)}, \quad \text{где} \quad a > b.$$

Определение 2. *Биллиардным столом на параболоиде назовем компактное множество с непустой внутренностью, ограниченное конечным числом софокусных параболоидов, у которого все углы излома на границе равны* $\pi/2$.

Мы изучаем следующую динамическую систему: материальная точка движется по биллиардному столу в поле силы тяжести с потенциалом $V = mgz$, отражаясь от границы абсолютно упруго. Такая динамическая система оказалась интегрируемой. Помимо полной механической энергии она обладает дополнительным первым интегралом, который был найден с помощью метода В. В. Козлова.

Теорема 1. *В параболических координатах долонительный первый интеграл биллиарда на параболоиде в поле силы тяжести имеет следующий общий вид:*

$$F = \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_2\lambda_3(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\dot{\lambda_1}^2 + \frac{\lambda_1\lambda_3(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\dot{\lambda_2}^2 + \\ + \frac{\lambda_1\lambda_2(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\dot{\lambda_3}^2\Big) + g\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Замечание 1. *Отметим, что в формуле выше фигурируют три переменные, в то время как размерность любого параболида из определения 1 равна двум. Однако на любом таком параболоиде всегда зафиксирована одна из параболических координат:* $\lambda_i = \hat{\lambda}$. *Следовательно,* $\dot{\lambda}_i = 0$ *и формула выше, действительно, корректно определена.*

Для биллиардного стола на эллиптическом параболоиде, ограниченного другим софокусным эллиптическим параболоидом, были описаны области возможного движения, построены бифуркационные диаграммы, вычислены инварианты Фоменко-Цишанга. Как оказалось, эта система ведет себя по-разному в зависимости от знака g.

Источники и литература

1) В.В. Фокичева Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2014, № 4, С. 18–27.
2) В.В. Фокичева Классификация биллиардных движений в областях, ограниченных софокусными параболами // Матем. сб., 2014, Т. 205, № 8, С. 139–160.
3) Г.В. Белозеров Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве // Матем. сб., 2020, Т. 211, № 11, С. 3–40.
4) И.Ф. Кобцев Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ // Матем. сб., 2020, Т. 211, № 7, С. 93-120.
5) С.Е. Пустовойтов Топологический анализ биллиарда в эллиптическом кольце в потенциальном поле // Фунд. и прикл. матем., 2019, Т. 22, № 6, С. 201-225.