Секция «Геометрия и топология»

Моделирование узла трилистник с мостом в пространствах постоянной кривизны

Научный руководитель – Медных Александр Дмитриевич

Кутбаев Айдос Бакберген улы

Аспирант

Новосибирский государственный университет, Механико-математический факультет, Новосибирск, Россия

E-mail: a.kutbaev@g.nsu.ru

Узлом называется вложение одномерной сферы $\mathbb{S}^1$ в трёхмерное евклидово пространство или в сферу.

В работах [1, 2] разработаны технологии нахождения евклидовой и гиперболической структур на узлах.

Рассмотрим узел трилистник с одним мостом, вложенный в трехмерную сферу. В данной работе мы установим критерия существования конического многообразия для данного узла в пространствах постоянной кривизны.

Пусть дан узел трилистник с мостом, его конический угол равен α, а конический угол моста равен γ.

Обозначим его коническое многообразие через $3_1(\alpha,\alpha,\gamma) = \mathbb{S}^3 \backslash 3_1$. Тогда имеют место следующие утверждения

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (\pi/3, \pi)$, а γ определен соотношением

$$\cos\gamma = \frac{1}{729}\big(521 + 1200\cos\alpha - 2112\cos^2\alpha + 448\cos^3\alpha + 1920\cos^4\alpha - \\ -1536\cos^5\alpha + 512\cos^6\alpha\big).$$

Тогда коническое многообразие $3_1(\alpha,\alpha,\gamma)$ моделируется в евклидовой геометрии.

Теорема 2. Пусть коническое многообразие $3_1(\alpha,\alpha,\gamma)$ моделируется в евклидовой геометрии. Тогда его нормированный объем равен величине

$$\frac{\sin^3\theta}{48\sin^4(\theta/2)},$$

где $\theta-$ угол скрещивания между осями вращений. При этом, имеет место следующее соотношение

$$2 - \cos\alpha - 3\cos\theta + 3\cos\alpha\cos\theta = 0.$$

Теорема 3. Пусть $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$ и γ удовлетворяют уравнению

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(C^3 - A\,B)^2}{C^6}, \tag{1}$$

где $A = (4\,X^2 + 3\,X + 1)\,Y - 3\,X^2 - X$, $B = (4\,X + 3)\,Y^2 + (-3\,X - 1)\,Y + X$, $C = Y - X + 2\,X\,Y$, $X = \cosh a$, $Y = \cos\theta$. Если $X > 1$, то коническое многообразие $3_1(\alpha,\gamma)$ допускает гиперболическую структуру.

Теорема 4. Пусть $X = \cosh a, Y = \cos\theta$, то гиперболический объем конического многообразия $3_1(\alpha,\gamma)$ вычисляется по формуле

$$Vol(3_1(\alpha,\gamma)) = -\frac{1}{2}\int_1^{X_0} L_\gamma(X)d(\gamma(X)),$$

где $X > 1$, X_0- единственное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{\sinh^2 L_\gamma}{\tan^2 \frac{\gamma}{4}} \dfrac{{}^2 L_\alpha}{\tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \dfrac{(X-Y)^2}{4}, \\ \cot^2 \dfrac{\alpha}{2} = (2X+1)(2Y-1). \end{cases} \qquad (2)$$

Источники и литература

1) A. D. Mednykh, D. Yu. Sokolova. The exsistence of an Euclidian structure on the figure-eight knot with a bridge, *Yakutian Math. J.,* Vol. 22, No. 4, 2015. P. 25-33.
2) Lilya Grunwald and Aydos Qutbaev (2022) "On a fundamental polyhedron of a hyperbolic cone-manifold,"Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences: Vol. 5: Iss. 4, Article 1.