Секция «Геометрия и топология»

Полная топологическая классификация слоений Лиувилля софокусных биллиардов на однополостном гиперболоиде в потенциальном поле Гука

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Хотин Николай Аркадьевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: nikhot15@gmail.com

Пусть E – невырожденная квадрика из семейства софокусных в $\mathbb{R}^3$, а D – замкнутая область на E, ограниченная конечным числом софокусных с E квадрик, и имеющая углы излома на границе равны $\pi/2$. Все такие области были классифицированы относительно комбинаторной эквивалентности Г. В. Белозеровым в работе [1]. Рассмотрим движение материальной точки внутри D в поле упругой силы, центр которой расположен в начале координат. Будем предполагать, что частица абсолютно упруго отражается от границы D. Такая система будет кусочно-гладко интегрируемой гамильтоновой системой(подробнее об ИГС см. в [2]. Дополнительный первый интеграл F, функционально независимый с энергией системы H, находится при помощи метода В. В. Козлова.

Теорема 1. *В эллиптических координатах первые интегралы рассматриваемой системы имеют следующий общий вид вне зависимости от выбора квадрики E:*

$$H = \frac{2\Delta_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}p_1^2 + \frac{2\Delta_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}p_2^2 + \frac{2\Delta_3}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2 + \frac{k}{2}(a+b+c-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)),$$

$$F = \frac{2\Delta_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}p_1^2 + \frac{2\Delta_2\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}p_2^2 + \frac{2\Delta_3\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)}p_3^2 - \frac{k}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

где p_i – импульс, соответствующий координате λ_i, k – коэффициент силы упругости, а $\Delta_i = (a-\lambda_i)(b-\lambda_i)(c-\lambda_i)$.

Замечание 1. *При фиксировании квадрики E одна из эллиптических координат становится постоянной, а импульс, соответствующий этой координате, обращается в нуль.*

Рассмотрим в качестве E однополостный гиперболоид. При разделении переменных уравнения движения принимают вид:

$$\dot{\lambda}_i = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_i-\lambda_j}\sqrt{\frac{(a-\lambda_i)(b-\lambda_i)(c-\lambda_i)}{\lambda_i-\widetilde{\lambda}}\left(\frac{k}{2}\lambda_i^2 + \left(h-\frac{k}{2}(a+b+c-\widetilde{\lambda})\right)\lambda_i - f\right)}.$$

Подкоренной многочлен имеет 5 вещественных нулей (a, b, c, ξ_1, ξ_2) и один полюс первого порядка. Заметим, что ξ_1 и ξ_2 также являются первыми интегралами рассматриваемой системы. В терминах новой пары интегралов были найдены области возможного движения материальной точки, построены биффуркационные диаграммы для случаев притягивающего и отталкивающего потенциалов и построены инварианты Фоменко–Цишанга для всех типов биллиардных столов.

Источники и литература

1) Г. В. Белозеров, Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве // Матем. сб., **211**:11, 2020, 3–40.А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, — Ижевск: РХД, 1999.
2) Г. В. Белозеров, Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве // Матем. сб., **211**:11, 2020, 3–40.