Секция «Геометрия и топология»

Построение полных наборов многочленов в биинволюции для алгебр Ли с неполиномиальными инвариантами

Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович

Лобзин Фёдор Игоревич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: fiadat@mail.ru

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, соответственно $\mathfrak{g}^*$ — сопряженное пространство. Рассмотрим на $\mathfrak{g}^*$ структуру:

$$\mathcal{A}_x(x) = (c_{ij}^k x_k),\ x \in \mathfrak{g}^*.$$

Данный тензор определяет скобку Пуассона — Ли на $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$: $\{f, g\}(x) = \mathcal{A}_x(df(x), dg(x))$. Функции $f \in C^\infty$, лежащие в ядре скобки Пуассона — Ли, называются функциями Казимира. Так же можно рассмотреть похожую структуру, называемую скобкой с замороженным аргументом:

$$\mathcal{A}_a(x) = (c_{ij}^k a_k),\ a, x \in \mathfrak{g}^*,\quad \{f, g\}_a(x) = \mathcal{A}_a(df(x), dg(x))$$

Алгебра Ли называется вполне интегрируемой, если на ней найдется полный набор функций, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона — Ли. Полным считается набор, содержащий в себе n функционально независимых функций, где n определяется формулой:

$$n = \frac{1}{2}(dim\ \mathfrak{g} + ind\ \mathfrak{g}).$$

Наибольший практический интерес представляют наборы, состоящие из многочленов. Во второй половине прошлого века была сформирована гипотеза, касающиеся существования полных наборов в инволюции.

Гипотеза Мищенко — Фоменко.[доказана] На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в инволюции относительно $\{\cdot, \cdot\}$. Для построения таких наборов удобно пользоваться методом сдвига аргумента. Отметим, что получившиеся сдвигом наборы будут также в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом, так что интересно рассмотреть естественное обобщение гипотезы 1, предложенное в [1].

Обобщенная гипотеза Мищенко — Фоменко. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для всех регулярных a из коалгебры на $\mathfrak{g}^*$; существует полный набор полиномов в биинволюции, то есть набор, одновременно находящийся в инволюции относительно $\{\cdot, \cdot\}$; и $\{\cdot, \cdot\}_a$. Полученные при применении метода сдвига аргумента наборы являются полными не для всех алгебр Ли. Также эти наборы функционально независимы не для всех a.

Первая гипотеза была доказана Садэтовым в 2004 году (см.[2]), но полученные его алгоритмом наборы не всегда оказываются в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Обобщенная гипотеза Мищенко—Фоменко доказана, например, для полупростых алгебр Ли (см.[1]). Несмотря на то, что обобщенная гипотеза была сформулирована только для регулярных сдвигов, в данной работе эта задача рассмотрена и для сингулярных сдвигов тоже. Ранее мной была доказана теорема:

Теорема (Метод построения полных наборов в биинволюции для сингулярных элементов). Пусть $\mathfrak{g}$ такая, что $\operatorname{tr.deg} P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ равна $\operatorname{ind}\ \mathfrak{g}$. Пусть для некоторого a из $\mathfrak{g}^*$ верно:

1) для почти всех x из $\mathfrak{g}^*$ плоскость натянутая на $x, a \in \mathfrak{g}^*$, без прямой λa состоит только из регулярных элементов;
2) $\operatorname{ind}(\operatorname{St}(a)) = \operatorname{ind}\ \mathfrak{g}$.

Тогда объединение набора многочленов, полученного сдвигом на элемент $a \in \mathfrak{g}^*$, с любым полным инволютивным набором многочленов, поднятым с $\operatorname{St}(a)^*$, дает полный биинволютивный набор многочленов на $\mathfrak{g}^*$.
Как можно понять из условия, эту теорему можно применять только для алгебр Ли с достаточным числом полиномиальных инвариантов. Существует стандартный способ, который позволяет выбирать полиномиальные образующие алгебры Мищенко–Фоменко, однако в рассматриваемых случаях он неприменим. На докладе будет описанный новый метод выбора полиномов из алгебры Мищенко–Фоменко. Будет доказано, что этот метод позволяет распространить предыдущий результат на случай алгебр Ли с рациональными инвариантами.

Источники и литература

1) *Bolsinov A. V., Zhang P.* Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras //Transformation Groups. – 2016. – Т. 21. – №. 1. – С. 51-86.
2) *Sadetov S. T.* A proof of the Mishchenko-Fomenko conjecture //Doklady Mathematics. – Pleiades Publishing, Ltd. (Плеадес Паблишинг, Лтд), 2004. – Т. 70. – №. 1. – С. 635-638.