Секция «Геометрия и топология»

Геометрия линейных и нелинейных геодезических в классе Громова–Хаусдорфа

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Вихров Антон Андреевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: vihrov.09@gmail.com

Симметричное отображение $d\colon X\times X\to[0,\infty]$, равное нулю на диагонали и удовлетворяющее неравенству треугольника, называется *обобщённой псевдометрикой*. Если, кроме того, функция d обращается в нуль только на диагонали, она называется *обобщённой метрикой*, а если она не принимает бесконечных значений, то она называется *метрикой*.

Расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет степень различия между двумя метрическими пространствами. Это расстояние было введено Громовым в 1981 [2] и определялось как наименьшее расстояние Хаусдорфа между изометрическими изображениями рассматриваемых пространств. Позднее эквивалентное определение этого расстояния было дано с помощью соответствий.

Мы используем систему аксиом, введенную фон Нейманом, Бернейсом и Гёделем, в рамках которой рассматриваются классы и собственные классы, обобщающие понятие множества. Собственный класс, состоящий из всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, обозначается $\mathcal{GH}$. На этом собственном классе естественным образом определяется понятие обобщенной псевдометрики. В работе [4] оптимальное соответствие между конечными метрическими пространствами использовалось для построения геодезической между произвольными компактными метрическими пространствами. Позднее, почти одновременно в [1] и [3], было доказано существование оптимального соответствия между компактными метрическими пространствами и, как следствие, геодезической между этими пространствами, порожденной оптимальным соответствием. Такие геодезические называются линейными. Однако до сих пор неизвестно, может ли любая пара метрических пространств, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, быть соединена некоторой геодезической.

В [5] был изучен специальный класс пространств, называемых пространствами общего положения, и было показано, что для любого метрического пространства S из этого класса существует окрестность $U_{\varepsilon(S)}(S)\subset$ такой, что для любого $Y\in U_{\varepsilon(S)}(S)$ существует оптимальное соответствие $R\in\mathcal{R}(S,Y)$ и в качестве в результате получается линейная геодезическая, соединяющая S и Y. Такие пространства общего положения всюду плотны в $\mathcal{GH}$, как показано в [6]. Определен более общий класс метрических пространств, а именно пространств обобщенного общего положения, оба результата справедливы и для этого более широкого класса. Таким образом, показана возможность соединения любого пространства обобщенного общего положения с достаточно близким метрическим пространством линейной геодезической.

В докладе будет приведен пример метрических пространств, между которыми не существует линейной геодезической.

Источники и литература

1) Samir Chowdhury, Facundo Mémoli. Explicit geodesics in Gromov–Hausdorff space. Electronic Research Announcements, 2018, 25: 48-59. doi: 10.3934/era.2018.25.006
2) M. Gromov, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Textes Mathématiques n°1 Paris (1981), 1-120.
3) A.O.Ivanov, S.Iliadis, and A.A.Tuzhilin, Realizations of Gromov–Hausdorff Distance. ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.
4) A.O.Ivanov, N.K.Nikolaeva, A.A.Tuzhilin, The Gromov–Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic. Math Notes 100, 883–885 (2016).
5) A.O. Ivanov, A.A. Tuzhilin, Isometric Embeddings of Bounded Metric Spaces into the Gromov-Hausdorff Class, Sbornik: Mathematic, Volume 213, Issue 10, 1400–1414, 2022.
6) A. Vikhrov, Denseness of metric spaces in general position in the Gromov–Hausdorff class, Topology and its Applications, Volume 342, 2024